Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

РАЗРАБОТКА ПРИКЛАДНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ДИНАМИКИ ДЕНЕЖНЫХ НАКОПЛЕНИЙ ИНДИВИДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИНИМАКСНОГО ПОДХОДА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 – Прикладная информатика

механико-математического факультета

Фарвазетдиновой Елены Михайловны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.наук, доцент ________________ И.Ю.Выгодчикова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.наук, профессор ________________ С.И.Дудов

Саратов 2018

Введение. Актуальность исследования. Актуальность анализа накопительных процессов и оценки денежных накоплений обусловлена развитием онлайн сервисов банков и их популярностью среди пользователей. С каждым годом появляются новые услуги, в том числе и онлайн, расширяются возможности удаленного управления своими финансовыми активами. В связи с этим постоянно увеличивается количество пользователей, а, следовательно, и объем обрабатываемых данных. Появляется необходимость в актуальных и новых принципах моделирования накопительных процессов.

Целью исследования является разработка прикладных программных средств для аппроксимации динамики денежных накоплений индивида с использованием минимаксного подхода.

В соответствии с данной целью поставлены и решены **следующие задачи:**

1. Проанализировать исследования и разработки известных ученых по моделированию динамики процессов индивидуального накопления и существующие подходы моделирования.
2. Изучить математический подход в сфере калькуляции накоплений;
3. Изучить математический подход к аппроксимации динамических рядов;
4. Составить описание программных блоков в виде блок-схемы и реализовать программное средство для аппроксимации динамики денежных потоков, используя принцип минимакса.
5. Провести вычислительные эксперименты и сопоставить результаты моделирования.

Объектом исследования являются индивидуальные денежные накопления.

Предметом исследования являются методы и алгоритмы выполнения аппроксимации динамики денежных накоплений индивида с использованием минимаксного подхода.

К числу наиболее существенных результатов, полученных в ходе написания данной работы, относится: алгоритм нахождения коэффициентов полинома наилучшего приближения, с последующей его реализацией на языке программирования MatLab.

Основное содержание работы. ***В первой части*** *«Степень разработанности проблемы моделирования динамики процессов индивидуального накопления» рассматриваются и анализируются исследования и разработки ученых в данной проблеме, а также существующие подходы моделирования. И приводится актуальность исследований бакалаврской работы.*

Повышение финансовой грамотности населения заставляет банки, пенсионные и инвестиционные фонды, страховые компании создавать всё более комфортные условия для привлечения клиентов, желающих копить деньги. К примеру, банк, с учётом существующих онлайн сервисов, не сможет предугадать и регламентировать процесс довложения денег клиента. Клиенту не нужно идти в банк, он дома спокойно выполняет операции со счётом в удобном для него режиме. В таком случае банку целесообразно пользоваться методами аппроксимации данных о динамическом процессе вложении средств клиента. При этом следует учитывать тот факт, что психологические особенности поведения различных людей приводят к существенному разбросу денежных вложений по временной шкале, что снижает прозрачность выводов. Целесообразно рассматривать эти операции за определённые равномерные периоды, скажем, ежемесячно. Возникает вопрос, каким образом учитывать суммы, вложенные клиентом беспорядочно в течение месяца.

В большинстве стандартных методах анализа временных рядов такие случайные, редкие события обычно считаются помехами качественного анализа, и они сглаживаются или отфильтровываются. Но при этом информация о процессах теряется, и прогноз оказывается ошибочным.

В связи с этим актуальной задачей является построение моделей, которые устойчивы к ошибкам, погрешностям и нечеткости в исходных данных, и которые позволяют учесть экстремально редкие события. Использование методов минимакса – это один из подходов, позволяющих строить модели динамических рядов, обладающие указанными свойствами.

Применение минимаксных методов в анализе индивидуальных денежных накоплений мало разработано, и исследования в данном направлении являются актуальными.

Во второй части *«Математический подход в сфере калькуляции накоплений» рассматриваются понятие аннуитета и его виды (простой и дробный), понятие монотонной рента и введены формулы для их расчета. Также в данной главе приводится ряд накопительных схем для различных режимов взносов и последующих выплат (схема монотонных взносов, схема с* n*-этапными взносами и произвольная схема взносов).*

Приведем современную и наращенную величины для *простого аннуитета* постнумерандо:

$$\bar{S}(0) = \frac{R \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n}\ ;\ \bar{S}(n) = \frac{R \cdot ((1+r)^n - 1)}{r}.$$

Подсчитаем наращённую сумму и современную величину потока для *дробного аннуитета постнумерандо* через n лет:

$$\bar{S}(n) = R_p \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1};\ \bar{S}(0) = \frac{\bar{S}(n)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}} = R_p \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)}.$$

Рассмотрим ренту постнумерандо, причем изменение величин платежей происходит во времени по закону $R + \beta \cdot t, t \in [0;\ n-1]$. Если ставка приведения постоянна на уровне r, то современная величина *монотонной ренты* рассчитывается по формуле:

$$\bar{S}(0) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r(1+r)^n} + \frac{\beta((1+r)^{n-1} - 1)}{r^2(1+r)^n} + \frac{\beta((1+r)^{n-1} - n)}{r(1+r)^n}.$$

Отсюда находим наращенную величину:

$$\bar{S}(n) = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r} + \frac{\beta((1+r)^{n-1} - 1)}{r^2} + \frac{\beta((1+r)^{n-1} - n)}{r}.$$

Приведём некоторые приёмы моделирования накопительной схемы. При разработке накопительной схемы составляется график взносов и последующих выплат исходя из ожидаемой продолжительности накоплений. Расчёт накоплений производится на основании баланса доходов и расходов путём оценки их стоимости, приведённой к одному моменту времени.

Выполним расчет размера выплат индивиду для *схемы монотонных взносов* режиме пренумерандо. Для этого запишем уравнение эквивалентности приведенных к моменту изменения направления потока взносов и дисконтированных к этому же моменту времени выплат:

$$\left(\frac{R\left(\left(1+\frac{r}{s}\right)^{ns}-1\right)}{\frac{r}{s}}+\frac{\beta\left(\left(1+\frac{r}{s}\right)^{ns-1}-1\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)^{2}}+\frac{\beta\left(\left(1+\frac{r}{s}\right)^{ns-1}-ns\right)}{\frac{r}{s}}\right)\cdot\left(1+\frac{r}{s}\right)=$$

$$=\frac{PP\left(\left(1+\frac{r}{k}\right)^{mk}-1\right)}{\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{mk-1}}+\frac{\gamma\left(\left(1+\frac{r}{k}\right)^{mk-1}-1\right)}{\left(\frac{r}{k}\right)^{2}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{mk-1}}+\frac{\gamma\left(\left(1+\frac{r}{k}\right)^{mk-1}-mk\right)}{\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{mk-1}}.$$

Уравнение эквивалентности для *схемы с* n*-этапными* взносами выглядит следующим образом:

$$R_1\left(\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}-1\right)\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12(n-1)+1}+R_2\left(\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}-1\right)\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12(n-2)+1}+$$

$$+\cdots+R_n\left(\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}-1\right)\left(1+\frac{r}{12}\right)=\frac{PP\left(\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12m}-1\right)}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12m-1}}.$$

Рассмотрим *произвольную схему взносов*. Если взносы поступают в начале каждого месяца (y_t) и различаются между собой по размеру, для вычисления выплат PP используем формулу:

$$\sum_{t=0}^{12n-1} y_t\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n-t}=\frac{PP\left(\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12m}-1\right)}{\frac{r}{12}\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12m-1}}.$$

***В третьей части** «Математический подход к аппроксимации динамических рядов» раскрывается смысл минимаксного подхода, который используется в задаче приближения функций алгебраическим полиномом. И изложены задача П.Л. Чебышёва и две модели минимакса: для многозначных* *данных и двузначных данных, которые сопровождаются алгоритмами решения соответственно.*

В работе предлагается метод аппроксимации данных, основанный на исследованиях П. Л. Чебышёва о равномерном наилучшем приближении функции алгебраическим полиномом фиксированной степени и обобщении этого метода, который позволяет выявить дополнительные свойства динамического ряда.

Постановка задачи Чебышёва. Пусть в узлах дискретной сетки $\mathrm{T} = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_N\}$ заданы значения показателя $y_k = y(t_k), k = \overline{0, N}$, $P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ — алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$, N и n — целые неотрицательные числа. Требуется минимизировать максимальное по всем узлам сетки T уклонение алгебраического полинома от значений дискретной функции в этих узлах:

$$\varphi(A) = \max_{k=\overline{0,N}} |\, y_k - P_n(A, t_k) \,| \to \min_{A \in R^{n+1}}.$$

Приведем обобщение данной задачи для случая нескольких независимых переменных. В традиционном регрессионном анализе такая модель интерпретируется как модель множественной регрессии.

Перейдем к *критерию аппроксимации для многозначных данных*.

Математическую модель динамического ряда взносов (y, диапазоны которых $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ заданы в периоды (в узлах) t_k сетки $T = \{t_0 <\ldots t_k \ldots< t_N\}$) представим в виде полинома $P(a_0, a_1) = a_0 + a_1 t$. Коэффициент $a_0 = R$, это аппроксимация взноса за первый период. Каждый раз взносы увеличиваются на величину $a_1 = \beta$. Это позволяет применять для оценки денежных накоплений формулу монотонной ренты.

В качестве критерия аппроксимации используется критерий равномерного приближения для расстояния Хаусдорфа между диапазоном ряда $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ и значением полинома в узле t_k сетки $T = \{t_0 <\ldots t_k \ldots< t_N\}$.

Постановка математической задачи (1). Учитывая вышесказанное, рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\rho(a_0, a_1) = \max_{k\in\overline{0,N}} \max\{y_{2,k} - P(a_0, a_1, t_k);\ P(a_0, a_1, t_k) - y_{1,k}\} \to \min_{(a_0,a_1)\in R^2}. \quad (1)$$

Обозначим $\rho^* = \min_{(a_0,a_1)\in R^2} \rho(a_0, a_1)$, $m = \max_{k=\overline{0,N}} \frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}$. Базисом будем называть $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < t_{j_2}\} \subset T$. Приведём алгоритм решения данной задачи.

Шаг 1. Ищем решение в предположении, что оно единственно и $\rho^* = m$. Для q_0 и q_1, $q_0 \neq q_1$ и таких, что $y_{2,q_0} - y_{1,q_0} = y_{2,q_1} - y_{1,q_1} = m$, вычисляем:

$$a_1 = \frac{y_{2,q_1}+y_{1,q_1}-y_{2,q_0}-y_{1,q_0}}{2(t_{q_1}-t_{q_0})}, \qquad a_0 = \frac{(y_{2,q_0}+y_{1,q_0})t_{q_1}-(y_{2,q_1}+y_{1,q_1})t_{q_0}}{2(t_{q_1}-t_{q_0})},$$

и проверяем, выполняется ли для всех $k = 0,1,\dots,N$ неравенство: $\max\{a_0 + a_1 t_k - y_{1,k}, y_{2,k} - a_0 + a_1 t_k\} \leq m$. Если это так, то (a_0, a_1) – решение задачи, и алгоритм завершается. Иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. Ищем решение в предположении, что оно единственно и $\rho^* > m$. Осуществляем перебор базисов и на каждом из них вычисляем

$$a_1^0 = \frac{y_{2,j_2}-y_{1,j_0}}{t_{j_2}-t_{j_0}},\ a_0^0 = \frac{1}{2}\left(y_{2,j_0} + y_{1,j_1} - a_0^1\left(t_{j_0} + t_{j_1}\right)\right), \quad h_0 = y_{2,j_0} - a_0^0 - a_1^0 t_{j_0},$$

и $a_1^1 = \frac{y_{1,j_2}-y_{1,j_0}}{t_{j_2}-t_{j_0}}, a_0^1 = \frac{1}{2}\left(y_{1,j_0} + y_{2,j_1} - a_1^1\left(t_{j_0} + t_{j_1}\right)\right),\ h_1 = a_0^1 - a_1^1 t_{j_0} - y_{1,j_0}$.

Выбираем $\beta = 0$ или $\beta = 1$ такое, что $\max\{h_0, h_1\} = h_\beta$. Если для всех $k = 0,1,\dots N$ выполняется неравенство $\max\left\{a_0^\beta + a_1^\beta t_k - y_{1,k}, y_{2,k} - a_0^\beta + a_1^\beta t_k\right\} \leq h_\beta$, то (a_0^β, a_1^β) – единственное решение задачи, и алгоритм завершается. Если решение не получено, а базисы исчерпаны, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Остаётся проанализировать ситуацию неединственности. Имеем $\rho^* = m$ и существует единственное q_0: $y_{2,q_0} - y_{1,q_0} = 2m$. Два решения можно найти, следуя процедуре. Берём i от *0 до N*: $i \neq q_0$ и вычисляем

$$a_1^1 = \frac{2y_{1,i}+2m-y_{1,q_0}-y_{2,q_0}}{2(t_i-t_{q_0})}\ , a_0^1 = \frac{(y_{1,q_0}+y_{2,q_0})t_i-2(m+y_{1,i})t_{q_0}}{2(t_i-t_{q_0})},$$

$$a_1^2 = \frac{2y_{2,i}+2m-y_{1,q_0}-y_{2,q_0}}{2(t_i-t_{q_0})},\ a_0^2 = \frac{(y_{1,q_0}+y_{2,q_0})t_i-2(m+y_{2,i})t_{q_0}}{2(t_i-t_{q_0})}.$$

Если $a_0^1 + a_1^1 t_k - y_{1,k} \le m, y_{2,k} - a_0^1 - a_1^1 t_k \le m$, то (a_0^1, a_1^1) – решение, если $a_0^2 + a_1^2 t_k - y_{1,k} \le m, y_{2,k} - a_0^2 - a_1^2 t_k \le m$, то (a_0^2, a_1^2)– решение. Алгоритм завершается.

Рассмотрим *критерии аппроксимации для двумерного ряда*.

Математическую модель динамического ряда взносов (y, диапазоны которых $[y_{1,k}; y_{2,k}]$ заданы в периоды (в узлах) t_k сетки $T = \{t_0 <\ldots t_k \ldots< t_N\}$) представим в виде полинома $P(A,t) = a_0 + a_1 t$. Рассмотрим критерий аппроксимации для многомерных данных, составленных из границ диапазонов.

Рассмотрим другую **задачу (2)**, где в качестве критерия аппроксимации используется максимум из квадратичных функций:

$$C(a_0,a_1) = \max_{k\in\overline{0,N}} c(a_0,a_1,t_k) \to \min_{(a_0,a_1)\in R^2},\ k \in \overline{0,N}, \qquad (2)$$

$$c(a_0,a_1,t_k) = \left|(P(a_0,a_1,t_k) - y_{1,k})(P(a_0,a_1,t_k) - y_{2,k})\right|$$

Если $y_{1,k} = y_{2,k} = y$ для всех $k \in \overline{0,N}$, то данная задача сводится к известной задаче П.Л. Чебышёва.

Обозначим $\rho^* = \min_{(a_0,a_1)\in R^2} \rho(a_0,a_1)\,, m = \max_{k=\overline{0,N}} \frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}$. Базисом будем называть $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < t_{j_2}\} \subset T$.

Приведём процедуру решения данной задачи.

Шаг 1. Берём произвольно базис. Решаем относительно коэффициентов a_0, a_1 и h систему алгебраических уравнений $\xi_k \in \{-1,1\}$:

$$\left(p(a_0,a_1,t_k)\right)^2 - p(a_0,a_1,t_k)\left(y_{1,k} + y_{2,k}\right) + y_{1,k}y_{2,k} - \xi_k h = 0, k = 0,1,2.$$

Шаг 2. Из решений текущей системы, для которых выполняется равенство $c(a_0,a_1) = |h|$, выбираем решения с максимальным значением $|h|$, и все полученные коэффициенты запоминаем. Берём новый базис и переходим к шагу 1. Если базисы исчерпаны, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Среди кандидатов на оптимальность выбираются коэффициенты a_0, a_1 с минимальным значением $c(a_0,a_1)$. Алгоритм завершается.

В четвертой части *«Вычислительные эксперименты и сопоставление результатов моделирования» производится постановка практической задачи, описание программных блоков в виде блок-схемы и интерпретируются результаты работы программного кода, выполненного с помощью MatLab.*

Постановка задачи исследования в выбранной предметной области. Имеем два накопительных потока (взносы поступают ежемесячно пренумерандо в течение n лет).

<u>Параметры первого потока:</u> $R_0, R_1, \dots, R_{12n-1}$ – произвольные взносы, некоторые из которых могут быть равны нулю. $S^1 = \sum_{k=0}^{12n-1} R_k \cdot (1+r)^{12n-k}$.

<u>Параметры второго потока:</u> $Q_0, Q_1, \dots, Q_{12n-1}$ – произвольные взносы, некоторые из которых могут быть равны нулю. $S^2 = \sum_{k=0}^{12n-1} Q_k \cdot (1+r)^{12n-k}$.

Итого будет накоплено $S = S^1 + S^2$.

Необходимо найти p и α, чтобы заменить два потока одним и накопить сумму S в режиме монотонной ренты.

$$p_0 = p, p_1 = p + \alpha, \dots, p_{12n-1} = p + (12n-1)\alpha;$$

$$S = \left(\frac{p((1+r)^n - 1}{r} + \frac{\alpha((1+r)^{n-1} - 1)}{r^2} + \frac{\alpha((1+r)^{n-1} - n)}{r}\right) \cdot (1+r).$$

Обозначим через $0, \dots, 12n-1$ номера временных периодов или моментов времени $t_0 < \dots t_k \dots < t_{12n-1}$. Составим из этих узлов дискретную сетку $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_{12n-1}\}$.

Учитывая вышесказанное, рассмотрим следующую задачу (аналитическое решение которой было представлено в предыдущей главе):

$$\max_{k=0,12n-1} |(R_k - (a_0 + a_1 \cdot t_k)) \cdot (Q_k - (a_0 + a_1 \cdot t_k))| \to \min_{a_0, a_1}.$$

Так же в данной главе для наглядного представления программного кода составлена блок-схема.

Проведя практический эксперимент с определенными входными данными, получили необходимые расчеты, а именно коэффициенты аппроксимации по задаче (2) и по МНК (см. рисунок 1), а также накопленные суммы по входным данным.

С помощью них можно сравнить два метода аппроксимации: метода аппроксимации двузначных данных и метод наименьших квадратов. Из рисунка 1 видно, что для «Реальные данные 1» аппроксимация по задаче (2) лучше, чем МНК т.к. 15446,79 ближе к 14725,80, чем 18984,97. А в случае «Реальные данные 2» наоборот – МНК лучше

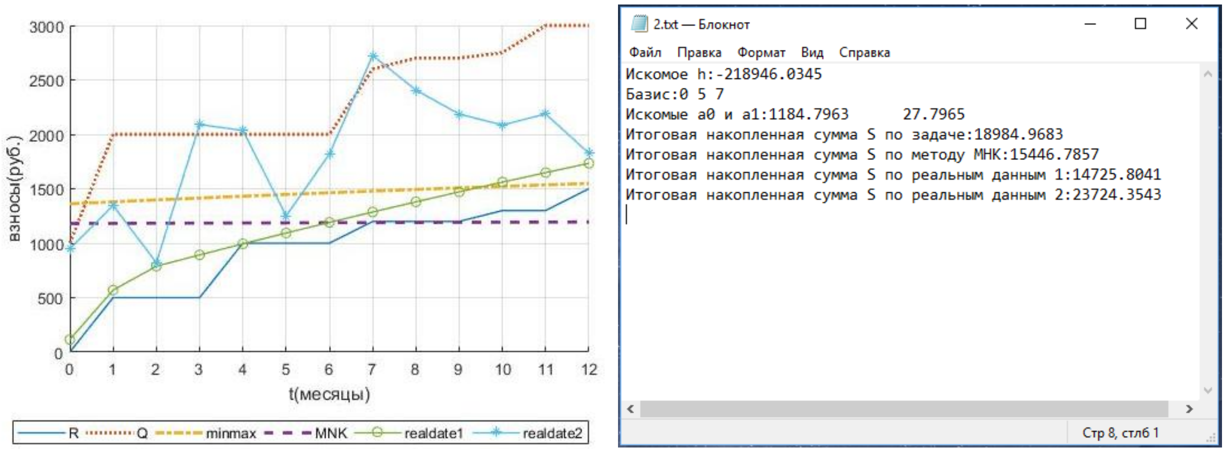

Рисунок 1 – Графический и текстовый результаты выполнения первого эксперимента

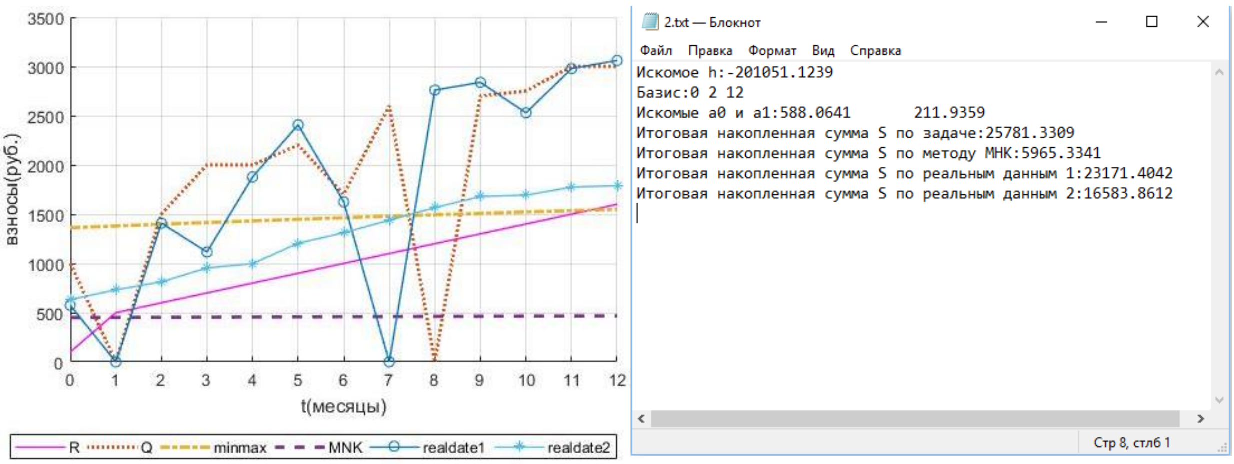

Рисунок 2 - Графический и текстовый результаты выполнения второго эксперимента

Проведя второй эксперимент по входным данным, содержащим несколько нулевых взносов, были получены следующие результаты. Из расчетов видно (см. рисунок 2), что и для «Реальные данные 1», и для «Реальные данные 2», аппроксимация по задаче (2) лучше, чем МНК т.к. накопленные суммы по реальным данным ближе к накопленной сумме по задаче (2), чем по МНК. Можно сделать вывод, о том, что, метод аппроксимации двузначных данных для потоков, содержащие несколько произвольных взносов равных нулю, лучше, чем по методу наименьших квадратов.

В приложениях *представлены исходный программный код реализации поставленной практической задачи и демонстрация работы программного кода в виде скриншотов экрана.*

Заключение. В теоретическом блоке были рассмотрены и разобраны, такие понятия как аннуитетные схемы и монотонная рента, которые сопровождались формулами расчета современной и наращенной величин. Аналогично были описаны многоэтапные процессы: схемы монотонных взносов, с n-этапными взносами и произвольная схема взносов. Так же в работе представлены критерии аппроксимации динамических рядов на основе задачи Чебышёва и составлены алгоритмические процедуры решения. В практическом блоке работы была разработаны прикладные средства для аппроксимации динамики денежных накоплений индивида с использованием минимаксного подхода. Для этого была решена задача моделирования произвольных взносов с бинарным заданием объема взносов в каждый период, без учета вероятности того или иного взноса, для приведения к схеме монотонных взносов на базе минимаксного критерия оптимальности. В условии практической задачи требовалось найти такие параметры p и α, с помощью которых можно заменить два денежных потока одним и накопить сумму S в режиме монотонной ренты. Для выполнения данной задачи была составлена блок-схема для наглядного отображения алгоритма, который реализован на встроенном языке программирования в среде MATLAB.