

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической экономики

**ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ МЕТОДОМ  
МОНТЕ-КАРЛО**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 247 группы  
направления 09.04.03 – «Прикладная информатика»

Механико-математического факультета

**Корольковой Натальи Анатольевны**

Научный руководитель  
профессор, д.э.н., профессор В.А. Балаш

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор С.И. Дудов

Саратов 2018

**Введение. Актуальность исследования.** Современная система управления предприятием использует множество подходов, стратегий и инструментов, позволяющих минимизировать риски и управлять самыми различными ситуациями. Одной из тенденций развития финансового рынка становится появление новых видов финансовых инструментов, таких, как экзотические опционы, без которых сегодня многие компании и отдельные участники финансового рынка уже не представляют свою деятельность. Опционные контракты, позволяют хеджировать подверженность ряда рисков в условиях неопределенности финансовых рынков, а также строить различные торговые стратегии, приносящие прибыль в большинстве случаев.

Рынок опционных контрактов нашел популярность среди большого круга инвесторов благодаря широким возможностям эффективно управлять капиталом при минимальных затратах. Этим обусловлена **актуальность** работы.

Существующие методы оценки опционов можно разделить на две основные группы: аналитические и численные. Использование аналитических методов возможно лишь для очень ограниченного набора экзотических опционов. В большинстве случаев приходится использовать численные методы оценки. С помощью метода Монте-Карло можно оценить стоимость произвольных опционов и деривативов. Однако, его использование требует большого объема вычислений и затрат времени для достижения необходимой точности.

**Цель** исследования состоит в раскрытии сущности экзотических опционов и оценке их стоимости методом Монте-Карло.

Для достижения указанной цели в работе предполагается решение следующих задач:

1. Дать характеристику экзотических опционов и изучить их роль в инвестиционном анализе;

2. Рассмотреть методы генерирования случайных процессов и решений стохастических дифференциальных уравнений применительно к задачам нахождения стоимости экзотических опционов;
3. Рассмотреть проблемы определения стоимости некоторых видов экзотических опционов методом Монте-Карло;
4. Разработать программный комплекс для определения цен некоторых видов экзотических опционов Методом Монте-Карло.

**Предметом исследования** является метод Монте-Карло и его применение для оценки стоимости экзотических опционов.

Результаты работы были представлены на вузовских, всероссийских и международных конференциях, проходивших в г. Саратов, г. Москва, г. Благовещенск, г. Самара, по результатам которых статьи опубликованы в сборниках работ конференций.

**Первая глава** *«Опционы и их роль на финансовом рынке» посвящена теоретическим вопросам, где дано понятие опционов, определена их роль в инвестиционном анализе, а так же описаны преимущества экзотических опционов над стандартными.*

Среди производных финансовых инструментов наибольший интерес представляют опционы, так как это самый гибкий финансовый инструмент.

Опционы на товары и акции известны уже несколько столетий. Считается, что впервые опционы начали использовать в XVIII веке в Голландии, на рынке цветов. В 1820-е годы на Лондонской фондовой бирже появились опционы на акции.

Ведущей площадкой по торговле опционами в России на сегодняшний день является Срочный рынок Московской Биржи.

Опцион – это сделка, дающая право его владельцу купить или продать определенное количество ценных бумаг, товаров по фиксированной цене в течение оговоренного срока. Опцион дает право купить или продать актив в определенном количестве, при этом, не накладывая обязанностей.

Наиболее распространенный опционный контракт – это опцион на акции.

Выделяют два основных типа опционов:

1) опционы «call» (call option), дающий право на покупку актива по заранее известной стоимости;

2) опционы «put» (put option), дающий право осуществить продажу активов по фиксированной цене.

Для инвестора оценка стоимости опционов – это, прежде всего, возможность страхования своих рисков. Оценка опциона позволяет определить вероятность получения прибыли, а также понять, какие изменения цены могут произойти за исследуемый период времени, что в итоге открывает возможность для создания хеджированных портфелей ценных бумаг с минимальным уровнем риска.

В отличие от традиционных опционов, экзотические опционы включают в себя ряд дополнительных переменных значений. Например, экзотический опцион дает держателю право выбирать, будет ли этот опцион call опционом или put опционом.

Многие инвесторы отдают предпочтение экзотическим опционам не только по причине их низкой стоимости, но также и потому, что они дают возможность получать доход выше среднерыночного, если правильно уловить тенденцию на рынке.

Барьерные опционы (Barrier option) – экзотические опционы, выплаты по которым зависят от того, достигла ли цена базового актива некоторого уровня за определенный период времени или нет. Барьерные опционы активно используются как инструмент хеджирования валютных рисков.

У барьерных опционов есть преимущества над стандартными:

- выплаты по таким опционам более точно отражают поведение рынка в будущем;

- барьерные опционы некоторые инвесторы выбирают чаще, т.к премии по ним, как правило, ниже, чем по обычным опционам;

- барьерные опционы менее подвержены риску, чем стандартные опционы.

**Во второй главе «Метод Монте-Карло для оценки стоимости экзотических опционов» рассматривается алгоритм расчета стоимости опционов методом Монте-Карло, его недостатки и методы снижения дисперсии, позволяющие повысить эффективность вычислений.**

Существующие методы оценки опционов (как стандартных, так и экзотических) можно разделить на две основные группы: аналитические и численные.

Аналитические методы (формула Блэка-Шоулза для оценки стандартных европейских опционов)

Цена европейского опциона put вычисляется по следующей формуле

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (1)$$

где  $C(S,t)$  – текущая стоимость опциона call в момент  $t$  до истечения срока опциона;

$S$  – текущая цена базисной акции;

$N(x)$  – функция распределения стандартного нормального распределения;

$K$  – цена исполнения опциона;

$r$  – безрисковая процентная ставка;

$T - t$  – время до истечения срока опциона (или период опциона);

$\sigma$  – волатильность доходности (квадратный корень из дисперсии) базисной акции.

Но в ряде случаев (например, при переменных процентных ставках) эти формулы работать не будут, что потребует численного моделирования.

В работе для оценки стоимости экзотических опционов используется метод Монте-Карло.

Метод Монте-Карло является удобным инструментом для определения справедливой цены опционов, зависящей от траектории, а так же производных ценных бумаг. Основными преимуществами метода Монте-Карло при оценке стоимости опционов являются относительная простота реализации и гибкость. Однако, в симуляциях Монте-Карло увеличение размера выборки влечет за собой большие затраты времени.

Принимая во внимание достоинства метода, необходимо помнить о достаточно медленной сходимости. Поэтому нас интересует поведение конвергенции, а точнее, скорость этой сходимости. В частности, интерес представляют методы понижения дисперсии получаемых результатов.

Метод антитетических переменных (Antithetic Variates).

Метод антитетических переменных состоит в замене независимых  $X$  на отрицательно коррелированные случайные величины.

Метод контрольных переменных (Control variates) – это еще один способ уменьшить дисперсию и получить более точные результаты. Он состоит в уточнении статистического среднего случайной величины через одновременно наблюдаемую, другую, с точно известным математическим ожиданием.

Условный Монте-Карло (Conditional Monte Carlo).

Следующим методом уменьшения дисперсии при оценке стоимости экзотических опционов является условный Монте-Карло (Conditional Monte Carlo).

Рассмотрим опцион put down-and-in, цена которого  $P_{di}$ . Идея условного Монте-Карло состоит в следующем: мы остановимся на моделировании тогда, как только цена акций достигнет барьера, а затем будем использовать формулу Блэка-Шоулза для вычисления цены опциона put, вместо моделирования ценового пути до истечения срока действия. Вычислительные затраты уменьшатся, так как часть расчетов можно выполнить аналитически и для этой части нет необходимости применять метод Монте-Карло.

Метод выборки по значимости (Importance Sampling).

Идея метода выборки по значимости основывается на том, что некоторые значения случайной величины в процессе моделирования имеют большую значимость (вероятность) для оцениваемой функции (параметра), чем другие. Если эти «более вероятные» значения будут появляться в процессе выбора случайной величины чаще, следовательно, дисперсия оцениваемой функции уменьшится. Таким образом, базовая методология выборки по значимости

заключается в выборе распределения, которое способствует выбору «более вероятных» значений случайной величины.

Предположим, что хотим оценить

$$\Theta = Ef[h(X)] = \int h(x)f(x)dx \quad (2)$$

где математическое ожидание с использованием плотности  $f(x)$  и  $h(x)$  является функцией случайной величины  $X$ . Если знаем другую плотность  $g(x)$ , которая удовлетворяет условию  $f(x)=0$  всякий раз, когда  $g(x)=0$ , можно написать:

$$\Theta = \int h(x) f(x) g(x) g(x) dx = Eg [h(X) f(x) g(x)] \quad (3)$$

Метод выборки по значимости эффективен при удачном выборе и построении такого распределения, так как оно даст существенное сокращение времени вычислений.

**В третьей главе** «Реализация алгоритмов оценки стоимости экзотических опционов методом Монте-Карло» произведена оценка стоимости европейского опциона методом Монте-Карло в MS Excel, а так как предложенные пример в MS Excel позволяет находить цену только классического опциона, поэтому в среде MatLab разработан программный комплекс, позволяющий оценивать стоимость барьерных (экзотических) опционов методом Монте-Карло.

В данной главе представлено пошаговое описание расчетов и промежуточные результаты, которые были произведены.

В работе рассмотрено несколько вычислительных процедур, позволяющих уменьшить дисперсию и значительно сэкономить время.

Для реализации метода Монте-Карло оценки европейских опционов использовалась программная среда MS Excel.

Проведена оценка классического (ванильного) Call опциона методом Монте Карло при 5 000 симуляций, рассчитано, какую выплату в среднем сгенерирует опцион на дату истечения. Для исследования скорости сходимости использовался обычный метод Монте-Карло, метод антитетических

(несовместных) переменных, метод контрольных переменных и комбинированный метод.

Однако, программе Excel необходимо дать некоторое время, чтобы произвести генерирование 1000 случайных цен и рассчитать соответствующие выплаты по опциону. В результате проведения 1000 итераций мы получим среднее значение выплаты по опциону. Далее, мы дисконтируем это значение по безрисковой процентной ставке. Результат будет достаточно близок к значению, полученному аналитически. Если провести 10000 итераций, то результат будет на много более точным, а если 100000 – точность повысится еще сильнее. Чем больше итераций совершить в рамках симуляции Монте-Карло, тем ближе полученный результат будет к истинной стоимости опциона. По мере роста числа итераций до бесконечности, метод Монте-Карло даст результат, идентичный на полученному с помощью формулы Блэка-Шоулза. Чем больше итераций совершено, тем сильнее стоимость опциона приближается к своему истинному значению.

Таким образом, в результате произведенных вычислений можно сделать вывод о том, что метод антитетических переменных позволяет добиться улучшения точности вычислений в два раза, по сравнению с обычным методом Монте-Карло, при тех же случайных величинах, а метод контрольных переменных – в десять раз. Применение метода антитетических переменных и метода контрольных переменных в комбинации, позволяет добиться улучшения точности вычислений в сто раз.

Производить симуляцию Монте-Карло в Excel не очень удобно в связи с тем, что требуется достаточно высокая скоростью расчетов. Если 1000 итераций Excel выполняет относительно быстро (это занимает несколько секунд), то для выполнения, 100 000 итераций, Excel подходит очень плохо. Кроме того, Excel позволяет находить цену классического опциона методом Монте-Карло. Для экзотических опционов эта задача становится более сложной.

Поэтому в среде MatLab разработан программный комплекс, позволяющий оценивать стоимость барьерных (экзотических) опционов методом Монте-Карло.

MatLab – это высокоуровневый язык технических расчетов, а так же интерактивная среда разработки алгоритмов и совокупность множества пакетов прикладных программ для решения математических задач, разрабатываемая компанией MathWorks. В данной работе была использована следующая версия MatLab: R2007b.

На основе алгоритмов уменьшения дисперсии в среде MatLab разработан программный комплекс для расчета стоимости экзотических опционов методом Монте-Карло.

Рассмотрены варианты различных значений барьера, но во всех вариантах барьер не превышает страйк-цену ( $S_b > S_0$ ,  $S_b < K$ ) и три размера выборки:  $n = 200, 2000$  и  $20000$ .

Сравнение значения цены, полученные аналитическим методом, обычным методом Монте-Карло, методом антитетических переменных, методом контрольных переменных, условным Монте-Карло и методом выборки по значимости. Здесь мы можем видеть сходимость решения моделирования к аналитическому решению при увеличении  $n$ . Метод Монте-Карло значительно выигрывает, когда число симуляций увеличивается.

Выборка по значимости обеспечивает лучшее снижение ошибок в оценивании опционов. Она оказывается полезной, увеличивая вероятность пересечения барьера.

**В приложении** доступен исходный код программной реализации, а также анализ результатов работы.

**Заключение.** Барьерные опционы являются примером экзотических опционов, которые не так широко представлены на рынке, как классические виды производных финансовых инструментов. Барьерные опционы стали более заметны на рынке производных в 1960-х гг., когда стали активно использоваться как инструмент хеджирования валютных рисков. Как правило,

стоимость, или премия, барьерного опциона ниже стоимости аналогичного, т.е. на покупку или на продажу, классического опциона, однако в премию барьерного опциона заложены ожидания относительно будущего изменения стоимости базового актива. Следовательно, оценка стоимости барьерных опционов позволяет построить прогноз на валютном рынке.

Таким образом, метод Монте-Карло, в отличие от других численных методов оценки стоимости опционов, дает лучшую оценку статистической ошибки. В работе раскрыта сущность экзотических опционов и проведена оценка их стоимости методом Монте-Карло. Определена роль экзотических опционов в инвестиционном анализе.

В работе рассмотрены проблемы определения стоимости некоторых видов экзотических опционов методом Монте-Карло, а так же разработан программный комплекс для определения цен некоторых видов экзотических опционов Методом Монте-Карло. В результате работы рассмотрены алгоритмы уменьшения дисперсии, которые значительно экономят время на расчеты. Применяя методы понижения дисперсии, можно улучшить эффективность и точность оценки стоимости опционов.

В работе реализованы четыре метода сокращения дисперсии.

Рассмотренные алгоритмы оценки стоимости барьерного опциона позволяют добиться улучшения точности вычислений и значительно сокращают время расчетов. Чем меньше стандартная ошибка, тем уже и лучше доверительный интервал, что указывает на более точную оценку.

Из произведенных расчетов, результаты которых были приведены в работе, можно сделать вывод о том, что наиболее точную оценку дает метод выборки по значимости. Таким образом, данный метод рекомендуем для расчета стоимости барьерного опциона.