Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Степенные множества графов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Кузьминой Анастасии Валерьевны

Научный руководитель
профессор, к.ф.-м.н. ____________ В.Н. Салий
18.01.2018 г.

Заведующий кафедрой
профессор, к.ф.-м.н. ____________ В.Н. Салий
18.01.2018 г.

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных понятий теории графов является понятие степенного множества. В данной дипломной работе будет рассмотрено само это понятие, основная теорема о степенном множестве, а также будут проведены некоторые вычислительные эксперименты: непосредственный подсчет степенных множеств для 4-вершинных графов, рассмотрен вопрос о степенных множествах неизоморфных графов, приведен пример построения графа в соответствии с теоремой.

Наиболее актуальной проблемой, связанной со степенным множеством, является вопрос о том, как устроен граф с максимальным числом элементов в его степенном множестве. В данной работе приведены примеры таких графов и указаны некоторые их общие свойства. Для графов с числом вершин от 2 до 6 подсчитано количество представителей с заданным числом элементов в степенном множестве.

Также в данной работе представлена программная реализация алгоритма построения графа по множеству натуральных чисел, приведенному в теореме о степенном множестве, и алгоритмов построения специфичных классов графов, приведенных в теоремах, доказанных С. Капуром, А. Полимени и К. Уоллом.

Кроме того, рассмотрены полностепенные графы (т. е. графы с максимальным числом элементов в степенном множестве), описана их внутренняя структура, а также получены факты о существовании единственного полностепенного графа для каждого числа вершин и наличия гамильтонового цикла в графе, получающемся путем удаления из полностепенного вершины степени 1.

Дипломная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и двенадцати приложений. Общий объем работы – сто двадцать семь страниц, из них восемьдесят две страницы – основное содержание, включая сорок рисунков и две таблицы, список использованных источников из пятнадцати наименований.

Под *ориентированным графом* (*орграфом*) будем понимать пару $\vec{G} = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество (*вершины орграфа*), а $\alpha \subseteq V \times V$ – отношение на множестве V (пара $(u, v) \in \alpha$ называется *дугой* орграфа *с началом* u *и концом* v). Отношение α называют *отношением смежности*, а соответствующую ему двоичную булеву матрицу – *матрицей смежности* орграфа $\vec{G}$.

Неориентированным графом (*графом*) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V.

Дуги неориентированного графа обычно называют *ребрами*.

Пусть $\vec{G} = (V, \alpha)$ – некоторый орграф, $v \in V$ – одна из его вершин. *Степенью исхода* вершины v называется число $d^{+}(v)$ дуг орграфа $\vec{G}$, имеющих начало в этой вершине. *Степенью захода* вершины v называется количество $d^{-}(v)$ дуг, имеющих конец в этой вершине.

В неориентированном графе $d^{+}(v) = d^{-}(v) = d(v)$. Число $d(v)$ называется *степенью вершины* v. При этом вершина считается *четной* или *нечетной* в зависимости от соответствующего свойства числа $d(v)$. Набор чисел, являющихся степенями вершин данного графа G, называют его *степенным множеством*, а вектор, компонентами которого являются расположенные в убывающем порядке степени всех вершин, - *вектором степеней*. Если $d(v) = 0$, то вершина называется *изолированной*.

Граф $G = (V, \alpha)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается символом K_n. Каждая его вершина имеет степень $n - 1$.

Дополнением графа $G = (V, \alpha)$ называется граф $\bar{G} = (V, \bar{\alpha} - \Delta)$. Таким образом, дополнение $\bar{G}$ графа G имеет то же множества вершин, и две вершины смежны в $\bar{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G.

Объединение графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ определяется как граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2)$. Объединение графа с его дополнением дает полный граф с соответствующим множеством вершин.

Соединение двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, где $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, - это граф $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup V_1 \times V_2 \cup V_1 \times V_2)$. Граф $G_1 + G_2$ сохраняет все имевшиеся в начальных графах ребра и, кроме того, в нем каждая вершина графа G_1 оказывается смежной с каждой вершиной G_2.

Два графа называются *изоморфными*, если вершины каждого можно занумеровать так, что вершины в одном графе окажутся смежными тогда и только тогда, когда в другом графе вершины с теми же номерами смежны.

Путем в графе называется последовательность ребер, в которой соседние в пути ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза. Вершина, принадлежащая только первому ребру пути, называется *начальной*, а вершина, принадлежащая только последнему ребру пути, называется *конечной.*

Граф называется *связным*, если для любых двух вершин $u, v \in V$ существует путь между ними.

Циклом в графе называется путь, начальная и концевая вершина которого совпадают.

Связный граф называется *деревом*, если он не содержит циклов. Вершины дерева, степень которых равна 1, называются *листьями*.

Подразбиением ребра $\{u, v\}$ называется граф G^*, полученный из графа G удалением ребра $\{u, v\}$, добавлением новой вершины w и ребер $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$.

Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же графа при применении разных цепочек подразбиений ребер.

Граф называется *планарным*, если существует такое его изображение на плоскости, что в этом изображении никакие два ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин. Такое изображение графа называется *плоским*.

Планарный граф называется *внешнепланарным*, если существует такое его плоское изображение, что все вершины лежат на внешнем периметре.

Расстоянием между вершинами называется длина кратчайшего из путей между этими вершинами.

Эксцентриситетом вершины называется наибольшее расстояние от нее до других вершин графа.

Радиусом графа называется минимальный из эксцентриситетов его вершин. *Диаметром графа* называется максимальный из эксцентриситетов его вершин.

Вершины графа, эксцентриситет которых равен радиусу, составляют *центр графа*.

Хроматическим числом графа называют минимальное количество цветов, которое необходимо для покраски вершин графа так, чтобы концы любого ребра имели разный цвет.

Вершинной связностью графа называется минимальное число вершин, которое нужно удалить из него, чтобы получить несвязный граф.

Реберной связностью графа называется минимальное число ребер, которое нужно удалить из него, чтобы получить несвязный граф.

Две вершины графа называются *связанными*, если существует путь, концами которого они являются. Будем считать, что всякая вершина связана сама с собой тривиальным путем (путь из 1 вершины). Тогда *отношение связанности* это отношение на множестве вершин графа такое, что пара вершин $\{u, v\}$ принадлежит этому отношению, если u и v связанны. Очевидно, что отношение связанности является отношением эквивалентности на множестве вершин графа.

Классы эквивалентности отношения связности называются *компонентами связанности*.

Мостом называется такое ребро графа, при удалении которого количество компонент связности в графе увеличивается.

Точкой сочленения называется такая вершина графа, при удалении которой количество компонент связности в графе увеличивается.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В разделе 1 приведены основные теоретические материалы, использованные для дипломной работы.

В пункте 1.1 представлены формулировка и доказательство основной теоремы о степенном можестве.

Теорема (см. [1]). Для любого множества натуральных чисел $A = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, $k \geq 1$, где $d_1 < d_2 < \dots < d_k$, существует граф с $d_k + 1$ вершинами, для которого А является степенным множеством.

В пункте 1.3 приведены формулировка и доказательство теоремы о построении дерева по заданному множеству натуральных чисел.

Теорема (см. [3]). Пусть $A = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ – множество натуральных чисел, где $n \geq 1$ и $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. Тогда дерево T такое, что его степенное множество равно A, существует в том и только в том случае, если наименьший элемент множества равен 1.

В пункте 1.4 приведены формулировка и доказательство теоремы о построении планарного графа по заданному множеству натуральных чисел.

Теорема (см. [3]). Пусть $A = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ – множество натуральных чисел, где $n \geq 1$ и $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. Тогда планарный граф со степенным множеством, равным A, существует в том и только в том случае, если наименьший элемент множества, т. е. элемент d_1, не меньше 1 и не больше 5.

В пункте 1.5 приведены формулировка и доказательство теоремы о построении внешнепланарного графа по заданному множеству натуральных чисел.

Теорема (см. [3]). Пусть $A = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ – множество натуральных чисел, где $n \geq 1$ и $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. Тогда внешнепланарный граф со степенным множеством, равным A, существует в том и только в том случае, если минимальный элемент множества, т. е. элемент d_1, равен 1 или 2.

В пункте 1.6 приведено описание оптимизации построений из теоремы в пункте 1.4

В разделе 2 приведены примеры вычислений: показаны шаги индукции согласно теореме 1.1 (пункт 2.1), вычисление степенных множеств графов (пункт 2.2), примеры степенных множеств неизоморфных графов (пункт 2.3) и графов с максимальным числом элементов в степенном множестве (пункт 2.4), а также подсчитано количество графов с различным числом элементов в степенном множестве (пункт 2.4).

В разделе 3 приведена реализация построений согласно теоремам раздела 1. В пункте 3.1 представлено формальное описание алгоритмов. В пунктах 3.2-3.7 приведено краткое описание классов, использованных для реализации алгоритмов из пункта 3.1. В разделе 4 представлены примеры работы программы.

Раздел 5 посвящен графам с максимальным степенным множествам (полностепенным графам). В пункте 5.1 показано существование единственного полностепенного графа для каждого натурального n, а также показана внутренняя структура таких графов. В пункте 5.2 доказано наличие гамильтонового цикла в графе, получающемся из полностепенного удалением вершины степени 1.

В пункте 5.3 представлены формальное описание алгоритма и краткое описание классов программы, реализующей построение полностепенных графов по пункту 5.1. В пункте 5.4 приведены аналогичные материалы для программы по построению гамильтонова цикла в полностепенном графе и представлены примеры работы обеих программ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, привели основные понятия теории графов и доказали теорему о степенном множестве графа и показали, что для n-вершинного графа в степенном множестве может быть не более, чем $n-1$ элемент. Привели пример построения графа в соответствии с теоремой. На примере показали вычисление степенного множества, а также привели примеры графов с наибольшим количеством элементов в степенном множестве.

Также показали, что неизоморфные графы могут иметь одинаковые степенные множества, как в случае разного количества вершин, так и в случае, когда оно одинаково. Подсчитали количество графов с различным числом элементов в степенном множестве для графов с количеством вершин от 2 до 6.

Кроме того, привели реализацию алгоритма построения графа по данному множеству натуральных чисел, приведенному в теореме о степенном множестве, и алгоритмов построения специфических классов графов, приведенных в теоремах, сформулированных С. Капуром, А. Полимени и К. Уоллом. При этом была приведена оптимизация теоремы о построении планарного графа по множеству натуральных чисел.

Также были рассмотрены полностепенные графы, описана их внутренняя структура, а также получены факты о существовании единственного полностепенного графа для каждого числа вершин и наличия гамильтонового цикла в графе, получающемся путем удаления из полностепенного вершины степени 1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. Москва: Наука. Физматлит, 1997.
2. Лекции по теории графов [Электронный ресурс]// http://acadclasses.narod.ru/math/lecture12.htm (дата обращения 03.04.2015) Лекция 12. Последнее изменение страницы: 05.10.2013. Русский.
3. Kapoor S.F., Polimeni A.D., Wall C.E. Degree sets for graphs // Fund. – 1977. – V. 95. – P. 189 – 194.
4. Изоморфизм графов [Электронный ресурс]// Википедия [Электронный ресурс]/ текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike/Электрон, дан. URL http://ru.wikipedia.org/wiki/Изоморфизм_графов (дата обращения: 03.04.2015) Изоморфизм графов - Википедия. Последнее изменение: 18:59, 3.10.2013. Русский.
5. Кузьмина А.В. О полностепенных графах. Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: материалы итоговой студенческой научной конференции. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2017. С. 26–27.
6. Миронов А.А. О реализуемости множества целых неотрицательных чисел степе- нями вершин графа. Тр. МИИТа. 1976. Вып. 510. С. 68–77.
7. Эккель Б. Философия Java. Библиотека программиста. 4-е изд. [Электронный ресурс] Электрон. дан. и прогр. СПб.: Питер, 2009.
8. Шилдт Г. Java: руководство для начинающих, 5-е изд.: Пер. с англ. – М. : ООО «И.Д. Вильямс», 2012.
9. Хорстманн Кей С., Корнелл Г. Java. Библиотека профессионала, том 2. Расширенные средства, 9-е изд. : Пер. с англ. [Электронный ресурс] Электрон. дан. и прогр. М. : ООО «И.Д. Вильямс», 2014.

10. Хакими, С. Л. О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа [Электронный ресурс] / С. Л. Хакими / Электрон. дан. и прогр. Кибернетический сборник. Новая серия. Выпуск 2., 1961. С. 40–53. Загл. с экрана. Яз. рус.
11. Харари, Ф. Теория графов [Электронный ресурс] / Ф. Харари ; пер. В. П. Козырева. Электрон. дан. и прогр. М. : УРСС, 2003. 296 с. Загл. с экрана. Яз. рус.
12. Diestel, R. Graph Theory [Электронный ресурс] / R. Diestel // Электрон. дан. и прогр. GTM 173. 2016. 312 p. Загл. с экрана. Яз. англ.
13. Зыков, А. А. Основы теории графов [Электронный ресурс] / А. А. Зыков. Электрон. дан. и прогр. М.: Вузовская книга, 2004. 380 с. Загл. с экрана. Яз. рус.
14. Оре, О. Графы и их применение [Электронный ресурс] / О. Оре. Электрон. дан. и прогр. М.: Едиториал УРСС, 2002. 171 с. Загл. с экрана. Яз. рус.
15. Оре, О. Теория графов [Электронный ресурс] / О. Оре. Электрон. дан. и прогр. М.: Наука, 1980. 354 с. Загл. с экрана. Яз. Рус.
16. Касьянов, В. Н. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В. Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. Электрон. дан. и прогр. СПб. : БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.