Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

**Гамильтоновость графа. Вершинная связность и число независимости**

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Лукиной Зинаиды Александровны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н. ___________ М.Б. Абросимов

18.01.2018 г.

Заведующий кафедрой

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

18.01.2018 г.

Саратов 2018

# ВВЕДЕНИЕ

Теория графов – раздел дискретной математики, изучающий свойства графов. В общем смысле граф представляется как множество вершин, соединённых рёбрами.

В современном мире теория графов имеет большую актуальность. Она находит применение, например, в геоинформационных системах (ГИС). Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередачи – как рёбра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

Представление различной информации в виде графов применяется во многих областях человеческой деятельности, в первую очередь из-за их наглядности и удобства использования.

Несмотря на то, что первые упоминания о теории графов относятся к XVIII столетию, она и сейчас, в век высоких технологий и мощнейших компьютеров, включает в себя множество «трудно вычислимых» задач. Такие задачи называют NP-полными, что значит не существует алгоритма их решения с полиномиальной оценкой сложности.

В данной работе рассматриваются основные понятия в области теории графов, а также некоторые достаточные условия гамильтоновости графов, связанные с числом независимости и вершинной связностью.

Дипломная работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников и 7 приложений. Общий объем работы – 66 страниц, из них 29 страниц – основное содержание, включая 18 рисунков и 7 таблиц, список использованных источников из 21 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В разделе 1 приводятся основные необходимые определения в области теории графов.

Разделы 2 и 3 посвящены понятиям числа независимости и числа вершинной связности графа. В данной работе все рассматриваемые достаточные условия гамильтоновости основываются на этих понятиях. В разделах также приведены используемые алгоритмы поиска числа независимости и числа вершинной связности.

Множество вершин графа $G$, называется *независимым,* если в нём ни одна пара вершин не соединена ребром. Будем называть такое множество *максимальным независимым*, если к этому множеству нельзя добавить никакую другую вершину из графа $G$ с сохранением независимости.

Максимальное независимое множество наибольшего размера называется *наибольшим независимым множеством.*

*Числом независимости* графа называется мощность его наибольшего независимого множества [7].

В настоящее время не существует точного полиномиального алгоритма решения задачи о поиске максимальных независимых множеств, как, впрочем, и для любой другой NP-полной задачи.

Одним из самых известных и эффективных существующих алгоритмов поиска всех максимальных независимых множеств графа является алгоритм Брона-Кербоша, разработанный в 1973 году. Но в данной работе будет использоваться его упрощенная версия, так как число вершин достаточно невелико для простого перебора.

Описание используемого алгоритма:

**На входе**: граф $G$, порядка $n$.

**На выходе**: наибольшее независимое множество вершин графа $G$

**Шаг 1**. Если граф $G$ – полный, то вернуть пустое множество. Конец.

Иначе перейти к Шагу 2.

**Шаг 2**. Проходя по всем вершинам графа $G$.

Если степень $v \in G$ равна $n-1$, то повторить Шаг 2.

Иначе перейти к Шагу 3.

**Шаг 3**. $A$ – независимое множество вершин графа $G$. Добавить $v$ в $A$.

**Шаг 4**. Проходя по всем вершинам графа $G$. $u \in G$

Добавлять вершину $u$ в $A$, если $u \neq v$ и добавление $u$ в $A$ не приведет к нарушению независимости множества $A$.

**Шаг 5**. $B$ – наибольшее независимое множество.

Если $|A| > |B|$, то $B := A$.

Если на Шаге 2 остались не пройденные вершины, то вернуться на Шаг 2.

**Шаг 6**. Вернуть множество B.

Рассмотрим отношение связности неориентированного графа. Оно является симметричным (если вершина $a$ связана с вершиной $b$, то $b$ связана с $a$), рефлексивным (считаем, что вершина достижима сама из себя) и транзитивным (если вершина $a$ связана с вершиной $b$, а вершина $b$ связана с вершиной $c$, то из этого следует, что $a$ связана с $c$). То есть отношение связности является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Классы этого отношения называются *компонентами связности* графа.

Вершина $v$ в графе $G$ называется *точкой сочленения*, если ее удаление ведет к увеличению компонент связности графа.

Связный граф, который не имеет точек сочленения называется *двусвязным*. То есть удаление любой его вершины вместе с инцидентными ей ребрами не нарушает связность графа.

Если после удаления любых $k-1$ вершин вместе с инцидентными им ребрами граф остается связным, то говорят, что он *k*-вершинно связный. Наибольшее $k$, при котором граф $G$ *k*-вершинно связный, называется *вершинной связностью* графа $G$ [7].

В данной работе для поиска вершинной связности используется следующий алгоритм:

**На вход**: граф $G$, порядка $n$.

**На выход**: число – вершинная связность

**Шаг 1**. Если граф не двусвязный (проверка на двусвязность заключается в поиске точек сочленения при помощи стандартного алгоритма обхода в глубину), то вернуть 1.

**Шаг 2**. Если граф полный, то вернуть $n - 1$. Конец. Иначе перейти к Шагу 3.

**Шаг 3**. Генерируются всевозможные сочетания без повторений от 1 до $n$ $G$ по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$k$ – длина сочетания.

Для $n = 3$ получим:

0

1

2

0 1

0 2

1 2

1 2 3

**Шаг 4**. Проходя по всем сочетаниям от меньших к большим.

Из графа $G$ удаляются вершины, номера которых соответствуют числам в каждом сочетании.

**Шаг 5**. После удаления вершин, соответствующих очередному сочетанию, оставшийся граф проверяется на существование точек сочленения.

Если появилась точка сочленения, либо граф стал тривиальным, то вернуть количество элементов в текущем сочетании $+1$ (найденная точка сочленения). Иначе вернуться на Шаг 4.

Основным разделом работы является раздел 4 «Гамильтоновы графы».

*Гамильтонов граф* — граф, в котором есть гамильтонов цикл.

*Гамильтонов цикл* — простой цикл в графе, содержащий все вершины графа ровно по одному разу [6].

Раздел содержит в себе несколько пунктов. В пункте 4.1 приведены достаточные условия гамильтоновости Нэша-Уильмса, Хватала-Эрдёша и Хэггвиста-Никогосяна, все они основаны на числе независимости и числе вершинной связности графа.

Введем обозначения:

$d$ – минимальная степень вершины в графе.

$b$ – число независимости.

$k$ – число вершинной связности.

**Теорема 1 (Нэш-Уильямс, 1971 [11]):** Пусть $G$ – двусвязный граф порядка $n$. Если выполняется: $d \geq max\{b, (n+2)/3\}$, то $G$ – гамильтонов.

**Теорема 2 (Хватал-Эрдёш, 1972 [8]):** Пусть $G$ – граф порядка $n \neq 3$. Если выполняется: $k \geq b$, то $G$ – гамильтонов.

**Теорема 3 (Хэггвист-Никогосян, 1981 [12]):** Пусть $G$ – двусвязный граф порядка $n$. Если выполняется: $d \neq (n+k)/3$, то $G$ – гамильтонов.

Пункт 4.2 содержит описание критерия Бонди-Хватала, который не основывается на значениях числа независимости и числа вершинной связности графа, но показал высокие результаты для графов с любым количеством вершин.

Для графа $G$ с $n$ вершинами *замыкание* определяется добавлением в $G$ ребра $\{u, v\}$ для каждой пары несмежных вершин $u$ и $v$, сумма степеней которых не меньше $n$.

**Теорема 4 (Бонди-Хватала, 1976 [13]):** Граф гамильтонов тогда и только тогда, когда его замыкание является гамильтоновым графом.

Обычно Теорема Бонди-Хватала используется в форме следующего достаточного условия гамильтоновости.

**Теорема 5** (**Бонди-Хватала, 1976**): Если замыкание $[G]$ графа $G$ является полным графом, то $G$ – гамильтонов.

Пункты 4.1 и 4.2 программно реализованы и их реализации приведены в приложениях к работе.  Пункт 4.3 содержит описания других достаточных условий гамильтоновости, основанных на числе независимости и числе вершинной связности графа. Но в данной работе они подробно не рассматриваются.

Раздел 5 содержит описание написанной программы для сравнения эффективности достаточных условий гамильтоновости Нэша-Уильмса, Хватала-Эрдёша и Хэггвиста-Никогосяна, а также критерия Бонди-Хватала. В пункте 5.1 описывается использование программного комплекса nauty & traces, который был необходим для генерации базы всех связных графов с числом вершин от 3 до 11. Пункт 5.2 это описание работы написанной программы, а пункт 5.3 содержит результаты вычислительного эксперимента. Мерой эффективности условия гамильтоновости являлось количество удовлетворяющих ему графов среди всех связных неизоморфных графов с заданным числом вершин.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены основные понятия теории графов, число независимости, вершинная связность и гамильтоновы графы.

На языке программирования Java 8 в среде Intellij IDEA были реализованы достаточные условия гамильтоновости Дирака, Оре, Нэша-Уильямса, Хватала-Эрдёша, Хэггвиста-Никогосяна и критерий Бонди-Хватала.

Был проведен вычислительный эксперимент для всех связных графов с числом вершин от 3 до 11, который показал, что наиболее эффективным является критерий Бонди-Хватала, но на графах с числом вершин > 9 условие Хэггвиста-Никогосяна его превосходит.

Сложность алгоритма Дирака $O(n+m)$, где $n$ – число вершин, а $m$ – число ребер в графе, Оре – $O(n^2)$, Бонди-Хватала – $O(n^4)$. Сложность остальных алгоритмов, представленных в этой работе значительно выше, так как в их основе лежат значения числа независимости и числа вершинной связности.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 Абросимов, М.Б. Графовые модели отказоустойчивости / М.Б. Абросимов. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.

2 Карпов, Д. Теория графов [Электронный ресурс] / Д. Карпов: URL: http://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf (дата обращения 15.09.2017) Загл. с экрана. Яз. рус.

3 Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофердис : Мир, 1978. С. 89–90.

4 Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. Книга 7. Графы. Часть 1 / А.Е. Кононюк : Освіта України, 2014. 560 с.

5 Оре, О. Теория графов / О. Оре. М.: Наука, 1980. 354 с.

6 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. М.: Мир, 1973. 296 с.

7 Абросимов, М.Б. Практические задания по графам. / М.Б. Абросимов, А.А. Долгов. 2-е издание: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2009. 76 с.

8 Diestel, R. Graph Theory [Электронный ресурс] / R. Diestel // GTM 173. 2016. 312 p. Загл. с экрана. Яз. англ.

9 The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс] / N.J.A. Sloane, editor: URL: http://oeis.org (дата обращения 21.09.2017) Загл. с экрана. Яз. англ.

10 DeLeon, M. A study of sufficient conditions for Hamiltonian cycles / M. DeLeon // Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal, Article 6, 2000. P. 129–145.

11 Nash-Williams, C. St. J. A. Edge-disjoint Hamiltonian circuits in graphs with vertices of high valency / C. Nash-Williams. Studies in Pure Mathematics // Academic Press, 1971. P. 157–183.

12 Haggkvist, R. A Remark on Hamiltonian cycles / R. Haggkvist, C. Nicoghossian // J. Combinat. Theory B 30, 1981. P. 118–120.

13 Bondy, J.A. A method in graph theory / J.A. Bondy, V. Chvatal // Discrete Mathematics, 1976. P. 111–135.
14 Faudree, R.J. Neighborhood unions and hamiltonian properties in graphs / R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, R.H. Schelp // J. Combinat. Theory. B 47, 1989. P. 1–9.
15 Bauer, D. On a theorem of Haggkvist and Nicghossian / D. Bauer, E. Schmeichel // Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, 1991. P. 20–25.
16 Bigalke, A. Uber Hamiltonische Kreise und Unabrhangige Ecken / A. Bigalke, H.A. Jung //Graphen Monatsch. Math 88, 1979. P. 195–210.
17 Bauer, D. A generalization of a result of Haggkvist and Nicoghossian / D. Bauer, H. J. Broersma, H. J. Veldman, L. Rao // J. Combinat. Theory B 47, 1989. P. 237–243.
18 Bondy, J.A. Longest paths and cycles in graphs of high degree / J.A. Bondy // Research Report CORR 80-16, Department of Combinatorics and Optimization, Faculty of Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1980. P. 11–13.
19 Faudree, R.J. Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs / R. J. Faudree, R. J. Gould, M. S. Jacobson, and R. H. Schelp // J. Combinat. Theory B 46, 1989. P. 1–20.
20 Dirac, G.A., Some theorems on abstract graphs / G.A. Dirac // Proc. London Math. Soc., 1952. P. 69–81.
21 Ore, O. Note on Hamilton circuits / O. Ore // Amer. Math. Monthly, 67, 1960. P. 55–56.