Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

**1-база ориентированного графа**

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студентки 6 курса 632 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Фоминой Анастасии Эдуардовны

Научный руководитель

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

18.01.2018 г.

Заведующий кафедрой

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

18.01.2018 г.

Саратов 2018

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория графов является важнейшим математическим инструментом, широко используемым в различных областях науки. Она тесно связана со многими разделами математики, среди которых — теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ. Широко применяется теория графов при разработке эффективных алгоритмов оптимизации тех или иных процессов. К такому направлению исследований относится и данная работа.

Необходимость решения задачи поиска 1-базы орграфа возникает в целом ряде приложений, но эта проблема доказано относится к числу труднорешаемых. Существование алгоритма построения 1-базы в произвольном орграфе несколько ускоряет процесс, прежде сводимый только к перебору подмножеств вершин (хотя в худшем случае этот алгоритм имеет всё ещё экспоненциальную сложность). Однако поскольку для целого ряда классов орграфов сформулированы и доказаны простые критерии и полиномиальные алгоритмы поиска 1-базы, можно предположить, что и для других классов возможно получить такие результаты.

Целью дипломной работы является изучение материалов, посвящённых задаче поиска 1-базы орграфа, в том числе доказательство собственных результатов. В частности, необходимо решить следующие задачи:

1. ознакомиться с литературой по теме;
2. определить возможности практического применения;
3. исследовать вопрос оценки количества 1-баз;
4. разобрать найденные алгоритмы построения;
5. разработать программу, позволяющую находить 1-базу произвольного орграфа.

В работе используются основные понятия из теории графов в соответствии с [1].

Неориентированный граф (или, для краткости, граф) – это пара $G = (V, \alpha)$, где $\alpha$ — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин $V$

(элементы отношения $\alpha$ называются ребрами).

Вершины $u$ и $v$ графа $G$ называются связанными, если в $G$ существует проходящий через них путь. Отношение связанности является эквивалентностью на множестве вершин графа. Граф с универсальным отношение связанности называется связным.

Путь в неориентированном графе — это последовательность рёбер, в которой любые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза. При этом считается, что оба конца каждого ребра, кроме первого и последнего, являются концами соседних с ним рёбер пути. Циклический путь — это путь, в котором начальная и конечная вершина совпадают. Простой путь — это путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум ребрам. Цикл — простой циклический путь.

Дерево — связный граф без циклов. Дерево с одной вершиной называется тривиальным. Дерево с выделенной вершиной $r$ называется корневым, а вершина $r$ — корнем.

Ориентированный граф (орграф) — это пара $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, где $V$ — конечное непустое множество (вершины орграфа), а $\alpha \subseteq V \times V$ – отношение смежности на множестве $V$ (пара $(u, v) \in \alpha$ называется дугой орграфа с началом в $u$ и концом в $v$). Говорят, что вершина $v$ смежна из вершины $u$. Дуга $(u, v)$ инцидентна вершинам $u$ и $v$, где $u$ — начало, а $v$ — конец дуги.

Петлёй называется дуга с совпадающими началом и концом.

Симметризацией орграфа $\overrightarrow{G}$ называется неориентированный граф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) - \Delta))$, полученный путём удаления из орграфа $\overrightarrow{G}$ петель и замены дуг орграфа ребрами, причем две встречные дуги $(u, v)$ и $(v, u)$ заменяются на одно ребро. Отношение $\Delta = \{(u, v) \in \alpha \mid u = v\}$ называется тождественным, а отношение $\alpha^{-1} = \{(v, u) \in V \times V \mid (u, v) \in \alpha\}$ — обратным для $\alpha$.

Под связным орграфом понимают орграф $\overrightarrow{G}$ со связной симметризацией $G$.

Обратным к заданному орграфу $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется орграф $\overrightarrow{G}^{-1} = (V, \alpha^{-1})$.

Орграф $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется направленным графом, если отношение смежности $\alpha$ антисимметрично, то есть $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta$.

Орграф $\overrightarrow{T}$ называется выходящим деревом, если в нем существует корень (то есть вершина, из которой достижима любая другая вершина) и если его симметризация $T$ является деревом. Орграф $\overrightarrow{T}$ будем называть входящим деревом, если обратный для него орграф $\overrightarrow{T}^{-1}$ представляет собой выходящее дерево.

Говорят, что вершина $v$ достижима из вершины $u$, если в орграфе существует путь из $u$ в $v$. Тогда $\delta \subseteq V \times V$ — отношение достижимости на множестве вершин орграфа $\overrightarrow{G}$.

Источник — это вершина, не достижимая из других вершин орграфа.

Симметричная часть $\varepsilon = \delta \cap \delta^{-1}$ отношения достижимости называется отношением взаимной достижимости. Сильными компонентами орграфа называются классы отношения взаимной достижимости. Орграф, по определению, является сильно связным, если отношение $\varepsilon$ универсально на нём.

Конденсация орграфа — это орграф, множеством вершин которого служит множество $S_1, S_2, \ldots, S_n$ всех сильных компонент орграфа $\overrightarrow{G}$, а дуга идет из $S_i$ в $S_j$, если в орграфе $\overrightarrow{G}$ имеется по крайней мере одна дуга, идущая из некоторой вершины компоненты $S_i$ к вершине компоненты $S_j$.

В орграфе маршрутом будем называть последовательность дуг $(v_0, v_1)$, $(v_1, v_2)$, $\ldots$, $(v_{n-1}, v_n)$ $((v_{i-1}, v_i) \in \alpha, \forall i = \overline{(1, n)})$, а путём — маршрут, в котором никакая дуга не встречается более одного раза. Простой путь — путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его дугам. Контур — простой циклический путь. Цепь — простой путь, не являющийся контуром. Под длиной маршрута будем подразумевать количество составляющих его дуг.

Бесконтурным называется орграф, не содержащий контуров.

Частью орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется орграф $\overrightarrow{G}^* = (V^*, \alpha^*)$, где $V^* \subseteq V$ и $\alpha^* \subseteq (V^* \times V^*) \cap \alpha$. Подграфом орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется пара $\overrightarrow{G}' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$.

Пусть задан некоторый орграф $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, $v \in V$ — одна из его вершин. Степенью исхода вершины $v$ называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $\overrightarrow{G}$, имеющих своим началом вершину $v$ (исходящие дуги). Степень захода вершины $v$ — это количество $d^{-}(v)$ дуг, имеющих $v$ своим концом (входящие дуги).

1-базой орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называют минимальный набор $S$ таких попарно несмежных вершин, что любая вершина орграфа $\overrightarrow{G}$ или принадлежит $S$, или смежна из некоторой вершины множества $S$ [2].

Турниром называется полный направленный граф $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, то есть такой направленный граф, в котором добавление любой новой дуги приводит к появлению контура длины 2.

Орграф называется функциональным графом, если $d^{+}(v) = 1$ для любой его вершины $v$ (то есть если из каждой вершины исходит точно одна дуга).

Орграф, по определению, является контрафункциональным графом, если орграф $\overrightarrow{G}^{-1} = (V, \alpha^{-1})$ функционален (то есть $\forall v \in V : d^{-}(v) = 1$).

Орграф называется четным, если в его симметризации все циклы содержат четное число ребер [4].

Линейным графом длины $m$ назовём орграф $\overrightarrow{L}$, полученный из $n$-вершинной цепи $\overrightarrow{P}_m$ переориентацией некоторых её дуг [5].

Дипломная работа состоит из списка необходимых определений, введения, 7 разделов, заключения, списка использованных источников и 3 приложений. Общий объем работы — 90 страниц, из них 48 страниц — основное содержание, включая 43 рисунка и 3 таблицы, список использованных источников из 29 наименований.

## 1 КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В разделе «Практическое использование 1-базы орграфа» в общем виде формулируется проблема поиска 1-базы, а также описываются области потенциального использования, среди которых можно особо выделить математическую экономику [7] (1-база используется в целях оптимизации управляющего персонала) и лингвистику [10, 11] (построение 1-базы может использоваться для восстановления неполного или испорченного текста [12])

В разделе «Связь ядра и 1-базы орграфа» вводится понятие «ядро орграфа».

**Определение 1.** *Подмножество $K \subseteq V$ вершин орграфа $\overrightarrow{D} = (V, \alpha)$ называется внутренне устойчивым, если $\forall u, v \in K : (u, v) \notin \alpha$, и внешне устойчивым, если $\forall u \in V \setminus K \ \exists v \in K : (u, v) \in \alpha$. Ядром орграфа $\overrightarrow{D} = (V, \alpha)$ называется такое подмножество $K \subseteq V$, которое одновременно устойчиво и внешне, и внутренне* [13].

Установлено, что 1-база и ядро являются двойственными понятиями, в соответствии с леммой 1. Поэтому все результаты, полученные для ядра, могут использоваться для поиска 1-базы.

**Лемма 1.** *Пусть $\overrightarrow{D} = (V, \alpha)$ — орграф и $S \subseteq V$ — некоторое подмножество его вершин. $S$ является ядром орграфа $\overrightarrow{D}$ тогда и только тогда, когда $S$ — 1-база орграфа $\overrightarrow{D}^{-1}$.*

Раздел «Поиск 1-базы орграфа» посвящен результатам, используемым при поиске 1-базы.

**Теорема 1 (Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн [7]).** *Если в орграфе нет контуров, то 1-база существует, причем единственная.*

**Теорема 2 (М. Ричардсон [4]).** *Если орграф четный, то 1-база существует.*

Связный функциональный граф может быть представлен в виде контура с входящими в него нетривиальными деревьями. Связный контрафункциональный граф представим в виде контура с выходящими из него деревьями. В случае четного контура 1-база существует в орграфах обоих классов, в соответствии с теоремой 2. В случае нечетного контура доказаны следующие результаты.

**Определение 2.** *Назовём вершину функционального графа правильной, если она входит в состав контура, является корнем входящего дерева и не принадлежит 1-базе этого дерева* [19].

**Теорема 3 ([19]).** *Для того чтобы у связного функционального графа с нечетным контуром существовала 1-база, необходимо и достаточно, чтобы этот орграф имел по крайней мере одну правильную вершину.*

**Теорема 4 ([19]).** *Связный контрафункциональный граф с нечетным контуром не имеет ни одной 1-базы.*

Пожалуй, самый простой способ поиска 1-базы доказан для турниров.

**Теорема 5 ([20]).** *В турнире существует 1-база, причем единственная, тогда и только тогда, когда в нём присутствует источник.*

Также приводится доказательство существования 1-базы в орграфах без нечетных контуров.

**Теорема 6 ([3]).** *Каждый орграф, не имеющий контуров нечетной длины, обладает 1-базой.*

Один из самых важных результатов — теорема Гутникова — Люботы, по доказательству которой можно сформулировать алгоритм построения ядра, а следовательно, и 1-базы, произвольного орграфа.

Пусть $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}(\overrightarrow{G})$ — система (множество) всех ядер $N$ орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, не содержащего петель. Зафиксируем произвольную вершину $u \in V$ и для каждой пары вершин $v, w \in V$, такой что $(v, u) \in \alpha \,\&\, (w, v) \in \alpha \,\&\, (v, w) \notin \alpha$, добавим в орграф дугу $(v, w)$. Проверив для выбранной вершины $u$ всевозможные пары вершин $v, w \in V$, удалим саму вершину $u$ из орграфа вместе со всеми инцидентными ей дугами. Тогда полученный орграф обозначим $\overrightarrow{G_u} = (V \backslash \{u\}, \alpha_u)$, а множество $\boldsymbol{N}_u = \boldsymbol{N}(\overrightarrow{G}_u)$ будем называть системой всех ядер этого орграфа [13].

**Теорема 7 ([13]).** *Если система* $\hat{\boldsymbol{N}}_u \subseteq 2^V$ *подмножеств вершин орграфа* $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ *состоит из всех таких* $N \in \boldsymbol{N}_u$*, для которых* $\alpha(u) \cap N \neq \varnothing$*, и всех множеств вида* $(N \backslash \alpha^{-1}(u)) \cup \{u\}$*, где* $N \in \boldsymbol{N}_u$*, то* $\boldsymbol{N} \subseteq \hat{\boldsymbol{N}}_u$*.*

Также в этом разделе приводится несколько теорем, которые дают некоторые дополнительные инструменты для поиска 1-базы орграфа.

**Теорема 8 (С. Рудяну [13]).** *Подмножество* $S$ *вершин орграфа без петель* $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ *тогда и только тогда является 1-базой этого орграфа, когда выполняются три условия:*

*1.* $S$ *содержит все источники* $\overrightarrow{G}$*;*

*2.* $S$ *не содержит ни одной вершины, смежной из какого-либо источника;*

*3. пусть* $V^+$ *— множество источников орграфа* $\overrightarrow{G}$*. Если* $V' = V \backslash (V^+ \cup \alpha(V^+))$*, то множество* $S \backslash V^+$ *служит 1-базой подграфа* $\overrightarrow{G}' = (V', \alpha')$*, где* $\alpha'(v) = \alpha(v) \cap V'$ *при* $v \in V'$*.*

**Теорема 9 (В. Н. Любота [13]).** *Подмножество вершин* $S \subseteq V$ *орграфа* $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ *является его 1-базой тогда и только тогда, когда* $S$ *не содержит вершин, в которых есть петля, и* $S$ *есть 1-база части* $\overrightarrow{G}' = (V, \alpha')$*, полученной из* $\overrightarrow{G}$ *удалением всех петель.*

**Теорема 10 ([23]).** *Орграф* $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ *имеет 1-базу тогда и только тогда, когда не существует подграфов* $\overrightarrow{G}' = (V', \alpha')$*, не обладающих 1-базой, в которых степень захода каждой вершины равна степени захода этой вершины в исходном орграфе.*

**Следствие 1 ([23]).** *Пусть орграф* $\overrightarrow{G}'$ *получен из* $\overrightarrow{G}$ *удалением всех вершин со степенью захода 1 и степенью исхода 0. Тогда* $\overrightarrow{G}$ *имеет 1-базу тогда и только тогда, когда 1-базу имеет* $\overrightarrow{G}'$*.*

Доказательства некоторых теорем, представленных в разделе «Поиск 1-базы орграфа», позволяют сформулировать алгоритмы построения 1-базы в орграфах конкретных классов, а именно: бесконтурных орграфов, орграфов без нечетных контуров, четных орграфов, функциональных и контрафункциональных графов —

а также алгоритм для произвольного орграфа. В разделе «Алгоритмы построения 1-базы орграфа» рассматриваются указанные алгоритмы с примерами их выполнения.

В разделе «Количество 1-баз в орграфе и их мощность» характеризуются опубликованные результаты, касающиеся проблемы определения количества 1-баз или их мощностей.

Раздел «Сложность задачи поиска 1-базы» посвящен доказательству NP-полноты задачи поиска 1-базы. В монографии Майкла Гэри и Дэвида Джонсона ([6]) в списке NP-полных задач под кодом ТГ 57 приведена задача «ЯДРО»:

УСЛОВИЕ. Задан ориентированный граф $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$.

ВОПРОС. Верно ли, что в $\overrightarrow{G}$ есть ядро? (Ядром ориентированного графа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется такое подмножество вершин $V'$, что никакие две вершины из $V'$ не соединены дугой из $\alpha$ и для каждой вершины $v \in V \backslash V'$ найдется такая вершина $u \in V'$, что $(u, v) \in \alpha$.)

Как видно из описания задачи «ЯДРО», речь в ней идет именно об 1-базе, но в другой терминологии. Отсюда получаем, что задача поиска 1-базы является NP-полной.

Заключительный раздел дипломной работы: «Программная реализация алгоритмов» — содержит описание и примеры работы разработанной программы «Построение 1-базы орграфа», позволяющей построить 1-базу произвольного орграфа (листинг программы приведен в приложениях А — В).

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Среди работ, посвящённых 1-базе орграфа, есть широко известные, такие как монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна или статья М. Ричардсона. Однако есть и малоизвестные результаты, имеющие при этом важное значение. К таким можно отнести статьи Е. В. Гутникова и В. Н. Люботы, в которых формулируется и обосновывается алгоритм построения 1-базы произвольного орграфа. Определённый интерес представляют работы, посвященные подсчету количества различных 1-баз орграфа, а также их мощностей. Помимо этого, среди опубликованного материала обнаружены теоремы, устанавливающие связь 1-баз ориентированного графа с 1-базами орграфов, обладающих меньшим количеством вершин. В современных работах, посвящённых проблеме поиска 1-базы, рассматриваются специфические классы орграфов (kernel-perfect, quasi-perfect [28], game-perfect [29] digraphs – русскоязычных аналогов данных понятий не найдено). Такие орграфы используются для изучения конкретных задач теории графов и теории игр.

В процессе выполнения дипломной работы было установлено, что в некоторых источниках для 1-базы не требуется минимальность. В некоторых из рассмотренных алгоритмов, а именно: в алгоритмах Ричардсона и Гутникова – Любоды – получаемое множество не всегда является минимальным из возможных. В этих случаях пользователю необходимо самостоятельно определить, имеет ли для него значение минимальность (и тогда выбрать наименьшее по количеству элементов множество).

В рамках дипломной работы была изучена литература по теме, выделены области практического использования 1-базы орграфа. На основании изученных алгоритмов разработана программа на языке программирования Java, позволяющая найти 1-базу произвольного орграфа.

Таким образом, цель работы считаю достигнутой, а первоначально поставленные задачи выполненными.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1 Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с. ISBN 5-02-015033-9.

2 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари ; пер. с англ. и предисл. В.П. Козырева ; под ред. Г.П. Гаврилова. Изд. 2-е. М. : Мир, 1973. 304 с.

3 Емеличев, В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 384 с.

4 Richardson, M. On Weakly Ordered Systems [Электронный ресурс] / M. Richardson // Bulletin of the American Mathematical Society, 1946. [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183507698 (дата обращения: 18.12.2017). Загл. с экр. Яз.англ.

5 Салий, В. Н. Система абстрактных связных подграфов линейного графа / В. Н. Салий // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2 (16). С. 90–94. ISSN 2071-0410.

6 Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Электронный ресурс] / М. Гэри, Д. М. Джонсон // Вычислительные машины и труднорешаемые задачи [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: http://cmcstuff.esyr.org/vmkbotva-r15/5%20курс/9%20Семестр/Тигры/NP-Complectness.pdf (дата обращения: 27.12.2017). Загл. с экр. Яз. рус.

7 Фон Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн ; перев.с англ. под ред. и с доб. Н. Н. Воробьева. М. : Наука, 1970. 708 с. : ил.

8 Алескеров, Ф. Т. Бинарные отношения, графы и коллективные решения [Электронный ресурс] / Ф. Т. Алескеров, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц // Google Книги [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: https://books.google.ru/books?id=5QR4CwAAQBAJ&printsec=frontcover

&hl=ru♯v=onepage&q&f=false (дата обращения: 27.12.2017). Загл. с экр. Яз. рус.

9 Домрачеев, Р. Ю. Параллельная реализация поиска ядер графа / Р. Ю. Домрачеев, С. С. Ефимов // Вестн. Ом. ун-та. 2011. № 2. С. 159–166.

10 Marcus, S. Mathematique et Phonologie. Theorie des Graphes et Consonantisme de la Langue Roumaine, I / S. Marcus, Em. Vasiliu // Rev. math. pures et appl. (PRP). 1960. Vol. 5, № 2. С. 319–340.

11 Marcus, S. Mathematique et Phonologie. Theorie des Graphes et Consonantisme de la Langue Roumaine, II / S. Marcus, Em. Vasiliu // Rev. math. pures et appl. (PRP). 1960. Vol. 5, № 3–4. С. 681–703.

12 Ломковская М. В. 1В426. Математика и фонология. Теория графов и румынский консонантизм. I, II (S. Marcus, Em. Vasiliu) // Реф. журнал «Математика». 1962. № 1В.

13 Зыков, А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 384 с.

14 Harminc, M. A Note on Kernels and Solutions in Digraphs / M. Harminc, R. Sotak // Discuss. Math. Graph Theory. 1999. Vol. 19. Pp. 237–240.

15 Harminc, M. Kernel and Solution Number of Digraph / M. Harminc // Acta Univ. M. Belii Ser. Math. 1998. No. 6. Pp. 15–20.

16 Harminc, M. Solutions and Kernels of a Directed Graph [Электронный ресурс] / M. Harminc // The Czech Digital Mathematics Library. [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: http://dml.cz/dmlcz/132267 (дата обращения: 17.12.2017). Загл. с экр. Яз. англ.

17 Bisdorff, R. On Computing Dominant and Absorbent Kernels in Bipolar Valued Digraphs [Электронный ресурс] / R. Bisdorff // ResearchGate. [Электроный ресурс] : [Сайт] URL: https://www.researchgate.net/publication/221398766_On_computing_domi

nant_and_absorbent_kernels_in_bipolar_valued_digraphs (дата обращения: 18.12.2017). Загл. с экр. Яз. англ.

18 Фомина, А. Э. Об 1-базе функциональных и контрафункциональных графов [Электронный ресурс] / А. Э. Фомина // Тезисы 58-й научной конференции МФТИ (23–28 ноября 2015 года) [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: http://conf58.mipt.ru/static/reports_ pdf/500.pdf (дата обращения: 9.01.2018). Загл. с экр. Яз. рус.

19 Фомина, А. Э. 1-базы различных орграфов / А. Э. Фомина // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2016. С. 450–452.

20 Fomina, A. E. On the 1-basis of a Tournament / А. Э. Фомина // Представляем научные достижения миру. Естественные науки : материалы VII международной научной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the World». Саратов : Изд-во «Техно-Декор», 2017. С. 41–44.

21 Гутников, Е. В. Нахождение ядер на графах / Е. В. Гутников, В. Н. Любота // Прикладная математика и программирование. Кишинев : «Штиинца», 1972. Вып. 7. С. 29–35.

22 Любота, В. Н. Кооперативные $pv$-игры и их решения / В. Н. Любота // Прикладная математика и программирование. Кишинев : «Штиинца», 1975. Вып. 14. С.62–71.

23 Behzad, M. Which Directed Draphs Have a Solution? [Электронный ресурс] / M. Behzad, F. Harary // Czech Digital Mathematics Library [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: http://dml.cz/dmlcz/130766 (дата обращения: 28.12.2017). Загл. с экр. Яз. англ.

24 Нигматуллин, Р. Г. Наибольшее число ядер в графах с $n$ вершинами [Электронный ресурс] / Р. Г. Нигматуллин // Math-Net.Ru [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: http://mi.mathnet.ru/uzku472 (дата обращения: 9.01.2018). Загл. с экр. Яз. рус.

25 Tomescu, I. Almost All Digraphs Have a Kernel [Электронный ресурс] / I. Tomescu // ScienceDirect [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X9090373P (дата обращения: 9.01.2018). Загл. с экр. Яз. англ.

26 Фомина, А. Э. Мощность 1 базы линейного графа / А. Э. Фомина // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета : материалы итоговой студенческой научной конференции. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. С. 33–34.

27 Chvatal, V. On the Computational Complexity of Finding a Kernel [Электронный ресурс] / V. Chvatal // AITS [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: https://users.encs.concordia.ca/∼chvatal/kernel.html (дата обращения: 27.12.2017). Загл. с экр. Яз. англ.

28 Berge, C. Recent Problems and Results about Kernels in Directed Graphs / C. Berge, P. Duchet // Discrete Math. 1990. Vol. 86. Pp. 27–31.

29 Andres, S. D. On Kernels in Game-perfect Digraphs and a Characterization of Weakly Game-perfect Digraphs [Электронный ресурс] / S. D. Andres // Diskrete Mathematik und Optimierung. 2017. [Электроный ресурс] : [Сайт]. URL: https://www.fernuni-hagen.de/MATHEMATIK/DMO/pubs/feu-dmo043-17.pdf (дата обращения: 9.01.2018). Загл. с экр. Яз. англ.