Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Жорданова форма матрицы смежности графа

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Шакировой Виолетты Александровны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н. ___________ М.Б. Абросимов

18.01.2018 г.

Заведующий кафедрой

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

18.01.2018 г.

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших направлений развития прикладной теории графов является исследование структурного сходства (или структурного различия) графов, которыми моделируются изучаемые объекты.

Задача изоморфизма графов принадлежит к задачам, относительно которых нет ясности: являются ли они полиномиально разрешимыми или нет, тогда, как известно, эта задача полиномиально разрешима для некоторых классов графов. Например, для планарных. Для таких классов построены эффективные алгоритмы, но эти алгоритмы используют специфичные структурные характеристики графов, таким образом, область их эффективного применения ограничена.

Существуют различные инварианты графа, например, число вершин, количество дуг или ребер. В данной работе будет рассмотрен один из инвариантов матрицы смежности – жорданова форма. Построение такой формы позволяет установить отсутствие изоморфизма между графами, используя жордановы формы матрицы смежности графа. Задача приведения матрицы к данному виду имеет полиномиальную сложность.

Также в данной работе рассматривается прямой алгоритм проверки изоморфизма графов. Он используется в том случае, если графы имеют одинаковую жорданову форму.

Дипломная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 10 приложений. Общий объем работы – 85 страниц, из них 51 страница – основное содержание, включая 21 рисунок и 5 таблиц, список использованных источников из 13 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Данная работа состоит из 3 разделов.

В разделе 1 приводятся основные необходимые определения теории графов. В разделе 1 подразделе 1.1.1 рассматривается один из самых простых инвариантов графа – минимальный (максимальный) матричный код.

Два графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$, $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называются изоморфными, если можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi: V_1 \to V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$ для любых $u, v \in V_1$.[1]

Инвариантом графа G называется набор его характеристик, одинаковых для всех изоморфных ему графов. Инвариантом графа являются, например, число вершин графа, количество дуг или ребер. Заметим, что сама матрица смежности инвариантом не является.

Полным инвариантом называется такой инвариант, который определяет граф однозначно с точностью до изоморфизма. Одним из известных числовых инвариантов является максимальный (минимальный) матричный код графа.

Если выписать элементы матрицы смежности по строкам, то получится некоторое двоичное число – код графа:

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}.$$

Само по себе это число не является инвариантом, так как матрицы смежности у изоморфных графов могут различаться, однако, если среди всех изоморфных графов выбрать матрицу смежности с максимальным (максимальный код) или минимальным значением (минимальный код) кода, то получится инвариант, причем полный.[13]

В разделах 1.2.1-1.2.5 приводится описание менее известного инварианта – жордановой формы графа и самой теоремы Жордана, на которой строится корректность алгоритма

Жорданова матрица представляет собой клеточную диагональную матрицу J, которая отличается от диагональной матрицы тем, что выше главной диагонали, в параллельном ей ряду могут быть расположены единицы.

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Ее диагональные клетки – жордановы клетки $J_{n_i}(\lambda_i)$ соответствующих порядков, с диагональными элементами, равными корням характеристического многочлена матрицы.

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Где числа λ_i в некоторых клетках могут быть одинаковыми, при этом, порядки n_i некоторых клеток могут совпадать. Число жордановых клеток, соответствующих фиксированному собственному значению λ_i, равно геометрической кратности собственного значения, которая определяется как кратность t_i корня λ_i минимального многочлена размерности соответствующего собственного подпространства. Сумма порядков всех жордановых клеток, соответствующих фиксированному собственному значению λ_i, равна алгебраической кратности k_i корня λ_i характеристического многочлена. Полное число жордановых клеток, среди которых могут быть и повторяющиеся клетки, равно максимальному числу линейно независимых собственных векторов матрицы.

Обычно принимается соглашение о том, что различные вещественные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ вещественной матрицы A упорядочиваются в порядке убывания, и в жордановой форме вначале располагаются клетки, соответствующие λ_1, затем λ_2 и т. д.

Если жордановы формы матриц смежности A и B двух графов отличаются только порядком следования жордановых клеток, то матрицы A и B называются подобными. [5]

В основе теоремы Жордана лежат два утверждения:

Утверждение 1. Каждая квадратная матрица подобна некоторой жордановой матрице, т. е. для каждой матрицы $A \in M_n$ существует невырожденная матрица $S \in M_n$, такая, что $S^{-1}AS = A_J$, где A_J – жорданова форма. Жорданова матрица A_J для матрицы A определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на ее главной диагонали.

Утверждение 2. Для подобия двух матриц A и B необходимо и достаточно, чтобы соответствующие жордановы матрицы совпадали с точностью до порядка следования клеток.

Если жордановы формы матриц смежности A и B двух графов отличаются не только порядком следования жордановых клеток, то матрицы A и B не являются подобными, и, следовательно, они не являются и перестановочно подобными, так как перестановочное подобие является частным видом подобия матриц. В этом случае графы не являются изоморфными. Следовательно, отсутствие изоморфизма между графами можно установить с помощью жордановых форм соответствующих матриц смежности.

Если матрица A вещественна и обладает только вещественными собственными значениями, то существует вещественная преобразующая матрица S. В случае комплексны собственных значений вещественной матрицы A жорданова форма становится комплексной. Характерно, что при этом все невещественные собственные значения разбиваются на комплексно-сопряженные пары. Частным случаем жордановой матрицы является диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения матрицы.[5]

Алгоритм построения жордановой формы матрицы описывается следующим образом:

Находится характеристический многочлен методом Лаверье, алгоритм которого приведен в разделе 1.2.3. Далее, используя метод Ньютона, алгоритм которого приведен в разделе 1.2.4, находятся характеристические корни многочлена. Таким образом, характеристический многочлен для матрицы смежности имеет вид

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

Минимальный многочлен имеет вид:

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{t_1}(\lambda - \lambda_2)^{t_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{t_r},$$

Показатели степеней t_i, входящие в минимальный многочлен, определяются из равенства

$$r_{t_i} = rang(A - \lambda_i E)^{t_i} = n - k_i$$

Для определения t_i нужно возводить матрицу $B_i = A - \lambda_i E$ в степени $j = 1, 2 \dots$, вычисляя при этом ранги матриц B_i^j и сравнивая эти ранги с числом $n - k_i$. Для нахождения ранга матрицы был использован метод Гаусса, приведения матрицы к треугольному виду. Алгоритм приведен в разделе 1.2.5.

Наименьший показатель степени, для которого будет выполняться равенство, равен t_i. Величина t_i определяет максимальный размер клетки Жордана, соответствующий собственному значению λ_i. Число s_{t_i} клеток максимального порядка t_i равно

$$s_{t_i} = r_{t_i - 1} - r_{t_i}.$$

Число s_{j_i} жордановых клеток любого порядка j_i, кроме максимального, находится из равенства

$$s_{j_i} = r_{j_{i+1}} - 2r_{j_i} + r_{j_{i-1}}$$

В частности, число жордановых клеток первого порядка равно $s_1 = r_2 - 2r_1 + n$. Отметим, что некоторые из клеток низшего порядка могут отсутствовать. [5]

Найдем верхнюю оценку числа операций, которые необходимо осуществить при установлении отсутствия изоморфизма между графами с помощью жордановой формы матрицы. Вычисление собственных значений матрицы смежности порядка n и определение их кратности требует проведения

$O(n^3)$ операций. Для сортировки собственных значений матрицы необходимо $O(nln(n))$ операций. Для каждого собственного значения λ_i $(1 \le i \le r)$ верхняя оценка числа операций, необходимых для вычисления степеней матрицы B_i, составляет $O(n^4)$. Вычисление ранга матриц методом Гаусса требует проведения $O(n^3)$ операций. Сравнение вычисленного ранга матрицы B_i^j с $n - k_i$ требуют $O(n)$ операций. Сопоставление жордановых форм матриц смежности двух графов требует проведения $O(n)$ операций. Общая верхняя оценка числа операций составляет $O(n^4)$.[5]

В разделах 1.3.1-1.3.3 описывается прямой алгоритм проверки изоморфизма графов, доказывается его корректность, рассчитывается трудоемкость такой схемы.

Принципиальная схема алгоритма спектрального расщепления проверки изоморфизма графов:

Шаг 0. $A^0 := A, B^0 := B, j := 1$.

Шаг 1.1. Если $j \le n$, то перейти на шаг 1.2, иначе перейти на шаг 6.

Шаг 1.2. Выбор ε_j.

Шаг 1.3. $A^j := A^{j-1} + \varepsilon E^j$.

Шаг 2. Решение системы линейных уравнений $A^j x = e_j$, x_j – полученное решение, $k := 1$.

Шаг 3.1. Если $k \le n$, то перейти на шаг 3.2, иначе – перейти на шаг 4.

Шаг 3.2. $B_k^j = B^{j-1} + \varepsilon_j E^k$.

Шаг 3.3. Решение системы линейных уравнений

$$B_k^j y = e_k, y_k \text{ – полученное решение.}$$

Шаг 3.4. $k := k + 1$. Перейти на шаг 3.1.

Шаг 4. Сравнение норм векторов x_j и y_k, где k такие, что $\forall i < j \nexists i: i \leftrightarrow k$.

Если $\forall k \; \|x_j\| \ne \|y_k\|$, то графы G_A и G_B неизоморфны. Работу алгоритма завершить.

Если $\exists k \; \exists P: x_j = P y_k$, и $\forall i \; \exists l: x_{ji} = y_{kl}$, и $x_{jj} = y_{ll}$, то $k_j := k$.

Шаг 5. $B^j = B^{j-1} + \varepsilon_j E^{k_j}$. $j \coloneqq j+1$. Перейти на шаг 1.1.

Шаг 6. Работу алгоритма завершить. Полученное соответствие $j \leftrightarrow k_j$ – найденный изоморфизм графов G_A и G_B.[12]

Трудоемкость принципиальной схемы алгоритма спектрального расщепления проверки изоморфизма графов.

Одна итерация алгоритма спектрального расщепления состоит из следующих этапов:

1 этап.

Решение системы линейных уравнений $A^j x = e_j$.

2 этап.

1. Решение в худшем случае n систем линейных уравнений $B_k^j y = e_k$, $k = \overline{1,n}$.
2. Сравнение компонент полученных решений: вектора x_j и (в худшем случае) n векторов $\{y_k\}_{k=1}^{n}$.

Трудоемкость процедуры решения систем линейных уравнений с заданной точностью зависят от метода, применяемого при решении систем линейных уравнений. Пусть $O(N_S)$ – количество элементарных машинных операций, которые необходимо совершить для решения систем линейных алгебраических уравнений с заданной точностью.

Процедура сравнения полученных решений может потребовать максимум $O(nlogn)$ элементарных операций.

Таким образом, общая трудоемкость одной итерации алгоритма составляет

$$O(N_S) + n\big(O(N_S) + O(nlogn)\big) = O\big(n(N_S + logn)\big).$$

Поэтому общая трудоемкость алгоритма по всем итерациям составляет

$$nO(n(N_S + logn)) = O\big(n^2(N_S + logn)\big).$$

В худшем случае для установления взаимно однозначного соответствия между вершинами поданных на вход алгоритма графов (представляющих их матриц) необходимо совершить n итераций.[12]

Второй раздел работы представляет собой вычислительные эксперименты. В подразделах 2.1.1-2.1.4 показаны различные примеры построения жордановой формы матрицы смежности: пример графов с одинаковыми собственными значениями, но разной жордановой формой; пример построения комплексной жордановой формы; пример графов с одинаковыми спектрами и жордановой формой. Также имеется подраздел, содержащий статистические данные о количестве различных жордановых матриц для неизоморфных графов для числа вершин до 10-ти. В подразделе 2.2.1 рассмотрен пример работы алгоритма спектрального расщепления проверки изоморфизма графов. Рассмотрена подробно каждая итерация алгоритма.

Третий раздел работы содержит описание программы и входных данных. Первая часть раздела описывает входные данные для программы подсчета жордановой формы матрицы, вторая часть описание входных данных для программы прямой проверки изоморфизма графов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены основные понятия теории графов. Приведен алгоритм построения жордановой формы графов. Рассмотрены алгоритмы, которые использовались для нахождения жордановой формы: метод Лаверье, метод Ньютона, метод Гаусса.

Программным путем были посчитаны статистические данные о количестве различных жордановых матриц для неизоморфных n-вершинных графов. Были также найдены матрицы смежности графов, которые имеют одинаковые жордановы формы. На примере изоспектральных графов было показано, что жорданова форма матрицы смежности содержит больше информации о графе, чем его спектр.

Также программным путем был реализован прямой алгоритм проверки изоморфизма графов, применяемый в том случае, когда нужно точно дать ответ на вопрос об изоморфизме графов, указав перестановку вершин или отсутствие таковой.

Все программы написаны на языке Java в среде разработки IntelliJIDEA 2017.2.6.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.
2. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. М. : Наука, 1968.
3. Уилкинсон, Дж. Ч. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Ч. Уилкинсон. М. : Наука, 1970.
4. Жорданова форма матрицы оператора [Электронный ресурс] URL: http://matematika.phys.msu.ru/files/stud_gen/6/JF.pdf (дата обращения 03.10.2017). Загл. с экрана. Яз. рус.
5. Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. М. : Наука, 1983.
6. Колобов, А. Г. Численные методы линейной алгебры : учебно-методическое пособие / А. Г. Колобов, Л.А. Молчанова. Владивосток : изд. Дольневост. ун-та, 2008.
7. Фадеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева. Спб. : Лань, 2009.
8. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. М. : Наука, 1968.
9. Теорема Гамильтона-Кэли. Минимальный многочлен матрицы [Электронный ресурс] URL:http://mathhelpplanet.com/static.php?p=minimalnyi-mnogochlen-matritsy (дата обращения 07.10.2017). Загл. с экрана. Яз.рус.
10. CospectralGraphsfromWolframMathWorld. [Электронный ресурс] URL:http://mathworld.wolfram.com/CospectralGraphs.html (дата обращения 08.11.2017). Загл. с экрана. Яз. english.
11. Подобные матрицы. Википедия. [Электронный ресурс] URL:https://ru.wikipedia.org/wiki/Подобные_матрицы. (дата обращения 08.11.2017). Загл. с экрана. Яз.рус.

12. Пролубников, А. В. Прямой алгоритм проверки изоморфизма графов / А. В. Пролубнков, Р. Т. Файзуллин // Математические структуры и моделирование, вып. 12. С. 28-57.
13. Абросимов, М. Б. Практические задания по графам / М. Б. Абросимов, А. А. Долгов. 2-е издание: Учеб. пособие. Саратов : Научная книга, 2009.