

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии
наименование кафедры

Исследование формирования хаоса с одним положительным и двумя
нулевыми показателями Ляпунова.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 461 группы

направления 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии»
код и наименование направления

факультета нано- и биомедицинских технологий
наименование факультета

Сюденовой Анары Вячеславовны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
зав. кафедрой д.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, уч. звание


подпись, дата

Е.П. Селезнев
инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:
д.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, уч. звание


дата, подпись

Е.П. Селезнев
инициалы, фамилия

Саратов 2018 г.

Введение.

Различные биологические системы характеризуются сложной хаотической динамикой. Одним из примеров такого рода системы являются нейроны. За два последних десятилетия динамика нейронных систем изучалась многими исследователями [1,2], в связи с появлением в жизнь человека томографа и обработки данных с помощью компьютера. Также благодаря теории динамических систем, изучению перехода от детерминированного поведения к хаосу, исследованию нелинейных волн и т.д. Изучение нелинейной динамики способствует моделированию процессов ассоциативной памяти, построению систем управления и контроля автономных машин роботов.

Динамические модели нейронов. Конструирование технических аппаратов, работающих аналогично биологическим существам, проводится с помощью математического моделирования подобных биологических структур на многих степенях устройства нервной ткани. Преимущественно используется способ нейросетевого моделирования, в котором структура с глубоким пространственно-топологическим строением собирается из отдельных нейронов, объединенные синаптическими связями. В настоящее время существует множество типов точечных нейронов: от граничных форм до невероятно похожих на биологические объекты «портретных» форм. Ранней пороговой формой нейрона считается форма, представленная Луи Лапиком в 1907 г. [3,4].

На практике рациональней использовать модель Ходжкиным и Хаксли [5], так как она построена с учетом экспериментальных данных и позволяет с большой точностью описывать появление импульсов на нейроне. Модель учитывает динамику ионных каналов, способных пропускать или не пропускать ионы через мембрану в зависимости от разности потенциалов между внутренним и внешним пространством клетки (трансмембранным потенциалом). Модель Ходжкина-Хаксли можно считать первой завершенной математической моделью генерации сигнала в нейроне, причем

заслуга ее создателей особенно велика, поскольку биохимические методы для изучения ионных каналов и насосов были разработаны только в 1980-х гг [6].

Следующим упрощением модели Ходжкина-Хаксли является модель Моррис- Лекара, предложенная в 1981 г.. Эта система уравнений описывает сложную взаимосвязь между мембранным потенциалом и активацией ионных каналов в мембране[7].

Наиболее близкой моделью будут уравнения в частных производных, описывающие перенос ионов в нейронах, но такие модели очень сложные, и их анализ также представляется очень сложным. Для явления синхронизации целесообразно использовать более простые модели, в которых оно наблюдается, и при этом сигналы, генерируемые модельными уравнениями, были бы похожи на сигналы, снимаемые с нейронов. По этому ученые Хиндмарш и Розе в 1984 году предложили простую модель в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, которые теперь называются уравнениями Хиндмарша-Розе [8].

В рамках данной работы будет исследована ситуация, когда внешнее периодическое воздействие инициирует сложные колебательные режимы в одиночной системе, при этом в автономной системе реализуется режим убегания фазовой траектории на бесконечность. При добавлении периодического внешнего воздействия возможна не только стабилизация фазовой траектории, но и возникновение хаотических и квазипериодических колебаний. Выбор формы воздействия является принципиальным, поскольку, например, для гармонического сигнала такого эффекта не наблюдается.

Целью данной работы является анализ на основе расчета спектра ляпуновских показателей устойчивости динамики системы Ресслера, а также стабилизация хаотических движений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + py, \\ \dot{z} &= q + z(x - r)\end{aligned}\tag{1}$$

Формирование хаоса с двумя нулевыми показателями Ляпунова.

На Рис. Изображена карта и увеличенный фрагмент построенной численно карты динамических режимов для системы (2) на плоскости параметров амплитуда-период внешней силы.

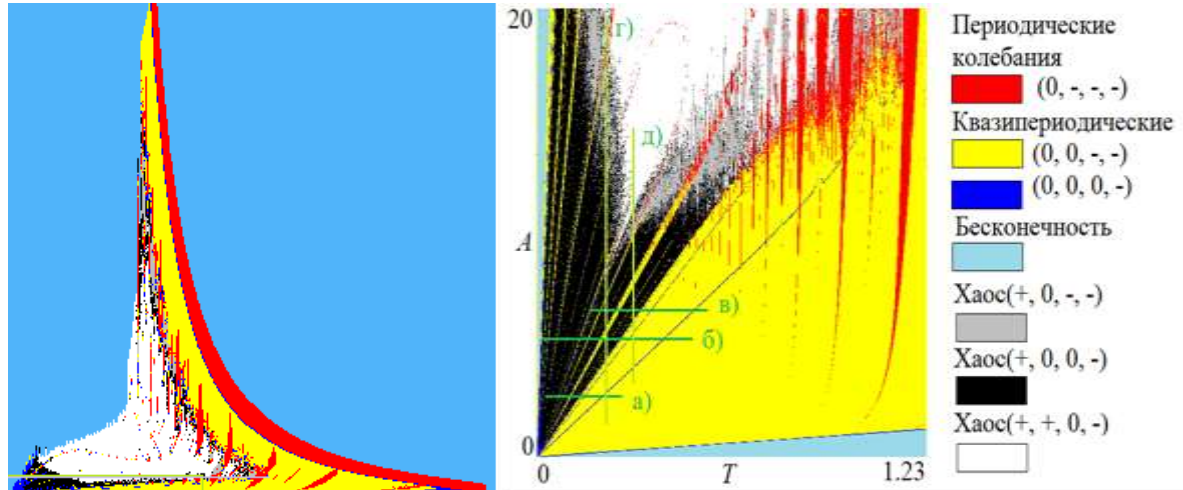


Рис. 1. (а)Карта и (б) Увеличенный фрагмент карты динамических режимов неавтономной системы Рёсслера.

Для того чтобы точнее понять, что происходит при переходе от квазипериодического режима к хаосу, был проведен однопараметрический анализ спектр показателей Ляпунова. На Рис.3.3.2. представлен график трех показателей Ляпунова при фиксированном параметре A ; четвертый показатель соответствует внешнему воздействию и всегда равен нулю, на графике не показан. При достаточно больших значения значения периода воздействия на рисунке видим, что старший показатель равен нулю, учитывая еще один дополнительный нулевой показатель, делаем вывод о том, что приданных параметрах реализуется режим двухчастотной квазипериодичности. С уменьшением периода $T=0,17$ на графике наблюдается приближение второго показателя к нулю, а затем опять он становится отрицательным. Такая картина динамики показателей Ляпунова соответствует бифуркации удвоения, причем в данном случае - это бифуркации удвоения двухчастотного тора. На графике мы можем различить как минимум три бифуркации удвоения тора. Затем при $T=0,12$ старший показатель становится положительным, а второй показатель обращается в ноль. Таким образом, с

учетом дополнительной нулевой экспоненты в нашей модели рождается хаос с одним положительным и двумя нулевыми экспонентами. При дальнейшем уменьшении периода воздействия наблюдаются окна двухчастотной квазипериодичности, разрушение которых происходит по такому же сценарию. На плоскости параметров такие перестроения отвечают полосам двухчастотной квазипериодичности внутри областей хаоса с одним положительным и двумя нулевыми экспонентами.

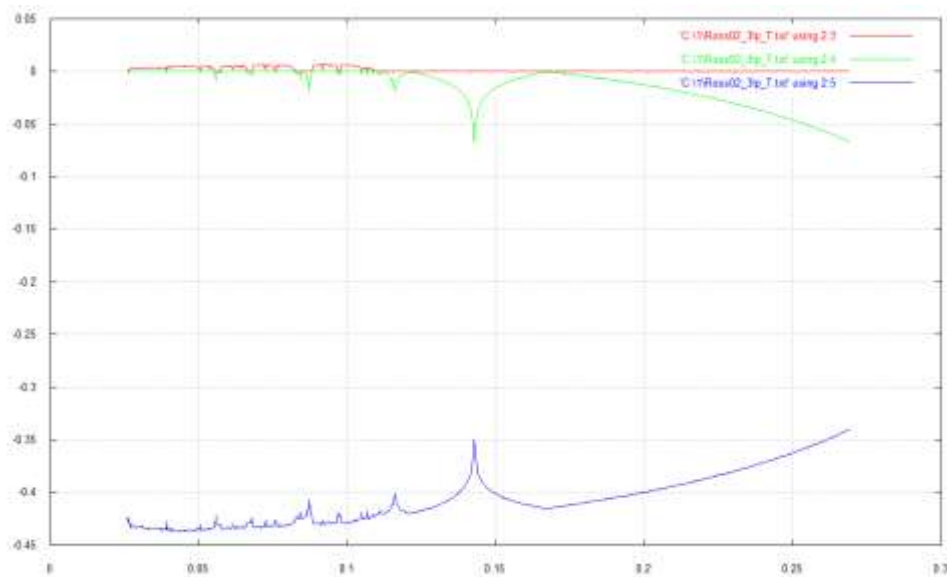


Рис. 2. а) Зависимость Ляпуновских показателей системы от периода воздействия при $p=0.2$, $q=0.2$, $r=0.2$, $A=2.199$.

На Рис.3.3.5. представлен график двух показателей Ляпунова при фиксированном параметре T . В случае малых значений амплитуды воздействия от 0,21 до 0,42 на рисунке видим, что старший показатель равен нулю, учитывая еще один дополнительный нулевой показатель, делаем вывод о том, что приданных параметрах реализуется режим двухчастотной квазипериодичности. С увеличением амплитуды A на графике наблюдается приближение второго показателя к нулю, а затем опять он становится отрицательным. На рисунке можно заметить как минимум две бифуркации

удвоения тора. Далее увеличивая амплитуду воздействия наблюдаются окна двухчастотной квазипериодичности, разрушение которых происходит по такому же сценарию. Далее происходит разрушение окон периодичности. Таким образом, с учетом дополнительной нулевой экспоненты в нашей модели рождается хаос с одним положительным и двумя нулевыми экспонентами. С последующим появлением гиперхаоса с двумя положительными и одним нулевым экспонентами.

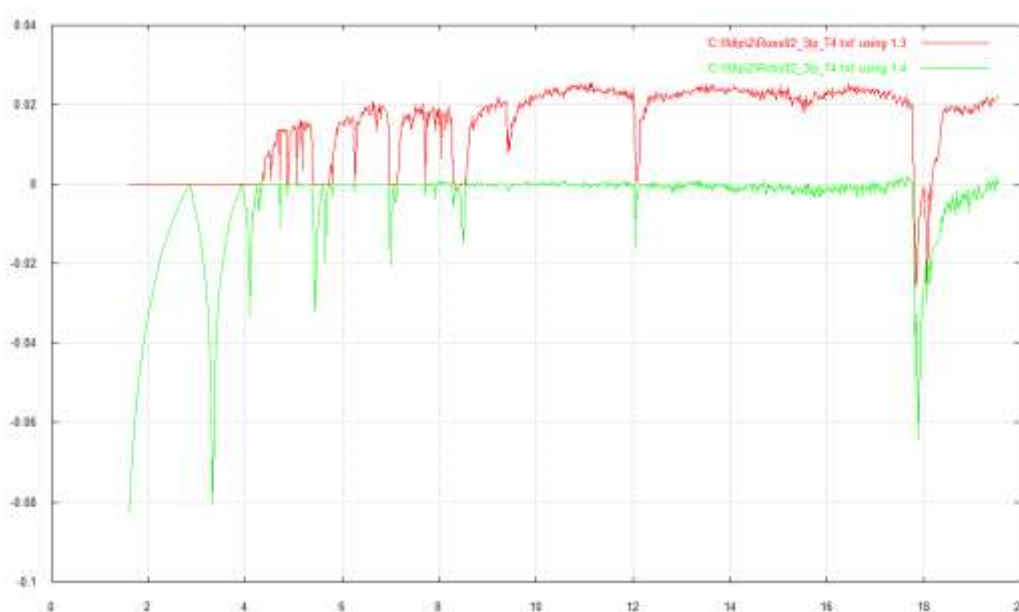
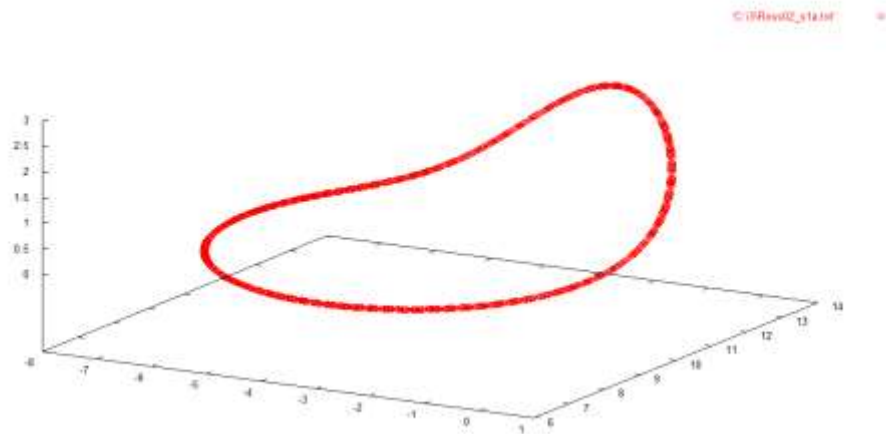
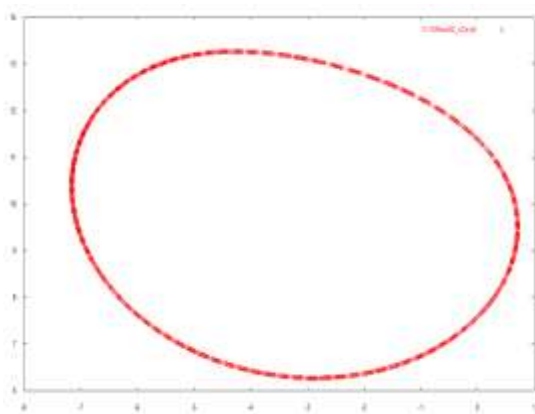


Рис. 3. Зависимость Ляпуновских показателей системы от амплитуды воздействия при $p=0.2$, $q=0.2$, $r=0.2$, $T=0.216$.

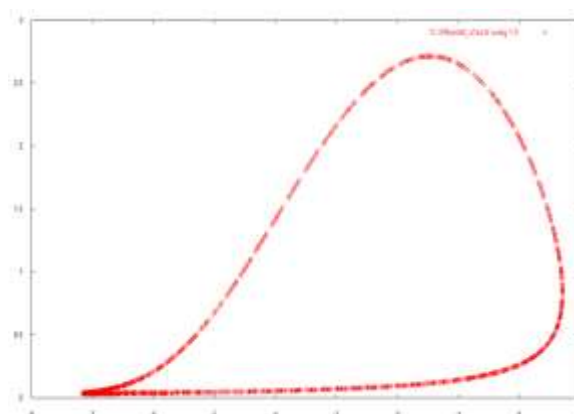
При фиксированном периоде внешнего воздействия T равном 0.305 и изменении амплитуды внешнего воздействия, в данном случае 3.2, построили сечение Пуанкаре, на котором наблюдали квазипериодические колебания (Рис. 4. а, б, в). Также это видно на карте Ляпуновских показателей.



а)



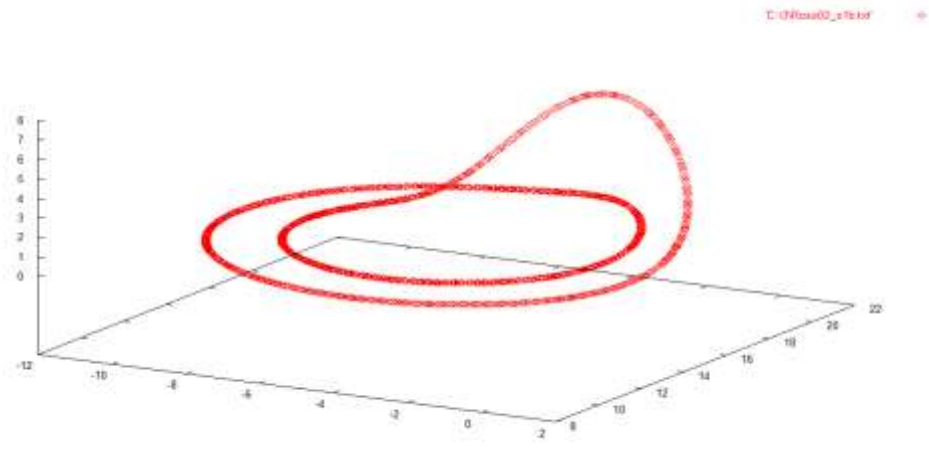
б)



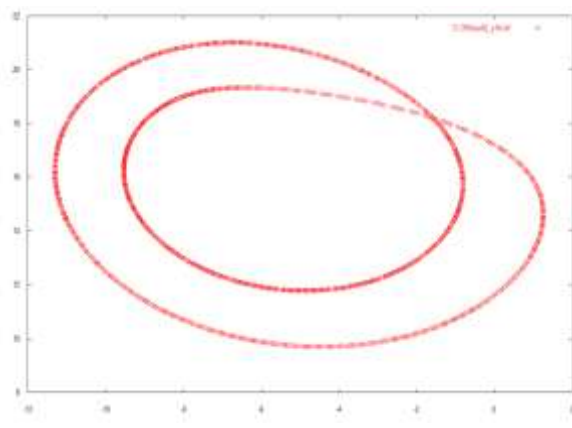
в)

Рис. 4. Трехмерное сечение и двумерное сечение Пуанкаре для системы Рёсслера при $T=0.305$, $A=3.2$, для периодического режима. б) Для осей x y . в) Для осей x z .

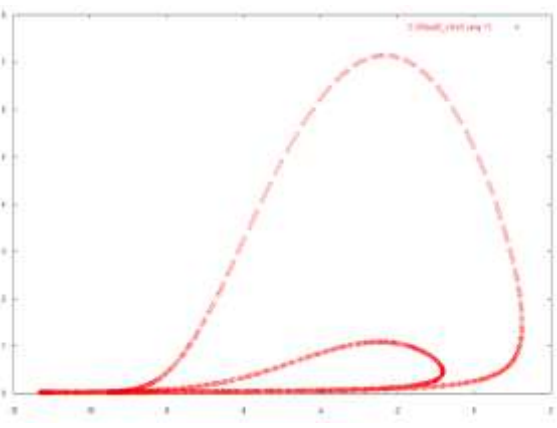
При фиксированном периоде внешнего воздействия T равном 0.305 и изменении амплитуды внешнего воздействия $A=5$, построили сечение Пуанкаре, на котором наблюдали удвоенные квазипериодические колебания (Рис.5. а, б, в). Также это видно на карте Ляпуновских показателей.



а)



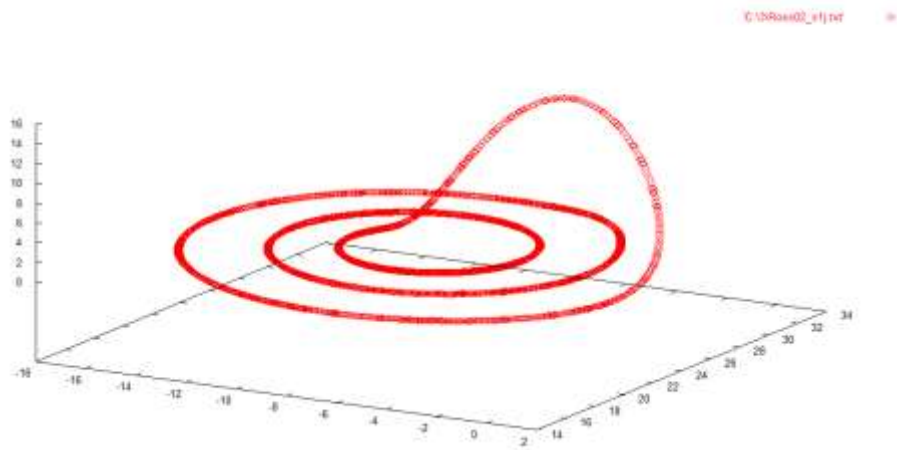
б)



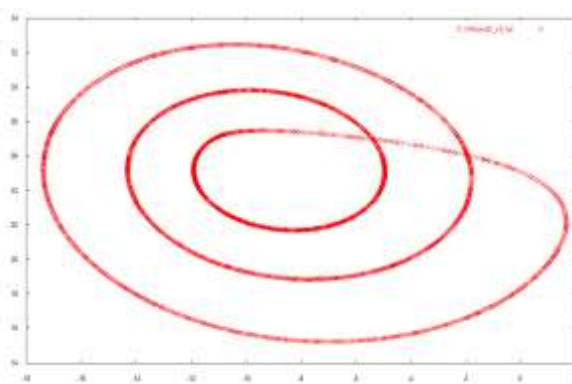
в)

Рис. 5. Трёхмерное сечение и двумерное сечение Пуанкаре для системы Рёсслера при $T=0.305$, $A=5$. б) Для осей x y . в) Для осей x z .
 Рёсслера при $T=0.305$, $A=6.25$. б) Для осей x y . в) Для осей x z .

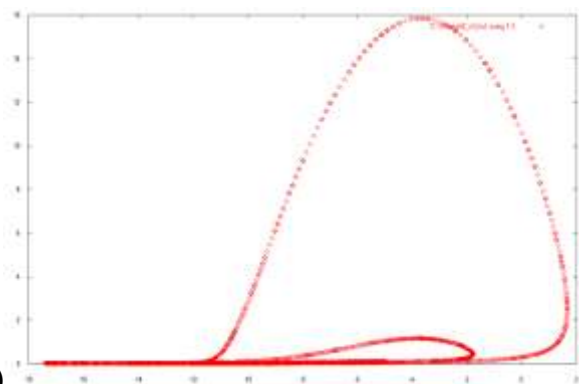
При фиксированном периоде внешнего воздействия T равном 0.305 и изменении амплитуды внешнего воздействия, для данного случая $A=7.75$, построили сечение Пуанкаре, на котором наблюдали тор (Рис. 6. а, б, в).



а)



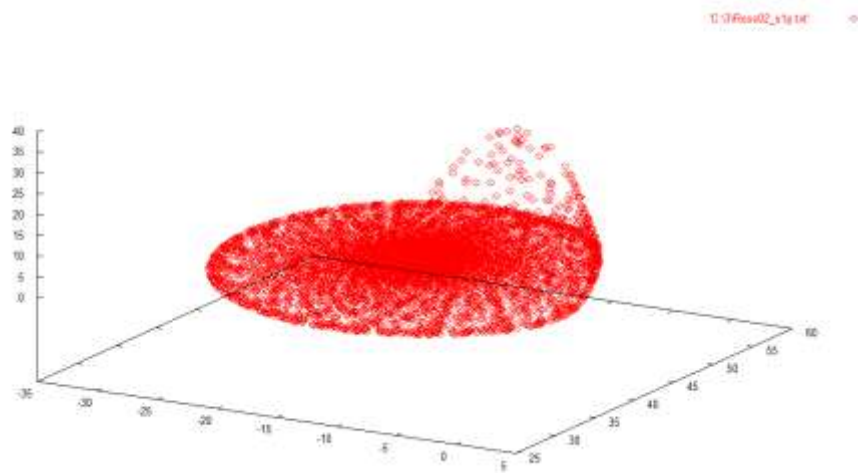
б)



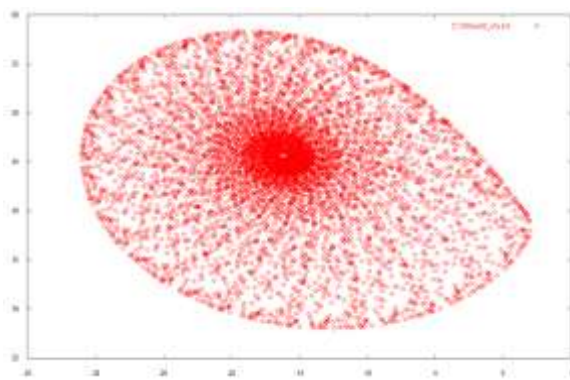
в)

Рис. 6. Трехмерное и двумерное сечение Пуанкаре для системы Рёсслера при $T=0.305$, $A=7.75$. б) Для осей x y . в) Для осей x z .

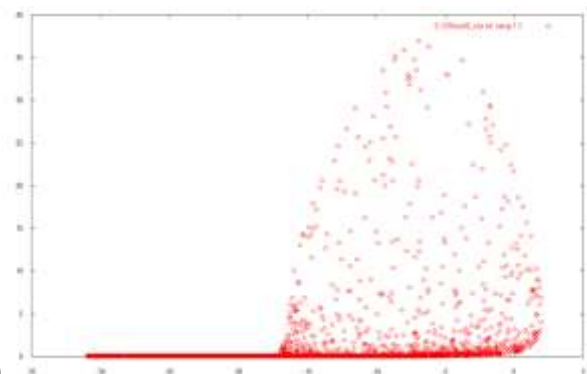
При фиксированном периоде внешнего воздействия T равном 0.305 и изменении амплитуды внешнего воздействия $A=14$, построили сечение Пуанкаре, соответствующее гиперхаосу с двумя положительными и одним нулевым показателем Ляпунова (Рис. 7. а, б, в).



а)



б)



в)

Рис. 7. Трехмерное и двумерное сечение Пуанкаре для системы Рёсслера при $T=0.305$, $A=14$. б) Для осей x y . в) Для осей x z .

Заключение

Таким образом в процессе выполнения квалификационной работы был проведен анализ математических моделей нейрона, изучены основы теории устойчивости, подготовлена программа для расчета спектра ляпуновских показателей, проведен на примере системы Реслера анализ динамики с одним и двумя положительными показателями Ляпунова, построены карты динамических режимов, на которых имеются существования хаоса и гиперхаоса. Старший ляпуновский показатель является нулевым в области квазипериодической динамики и становится отрицательным внутри встроеной в неё систем областей периодических режимов. Также построены сечения Пуанкаре и было выявлено наличие удвоение квазипериодической инвариантной кривой и удвоение торов. Причем в точках таких бифуркаций второй ляпуновский показатель обращается нуль, затем происходит разрушение торов с возникновением хаоса, что диагностируется по положительной величине старшего показателя. Отметим, что эти особенности динамики возможны только, если автономная система характеризуется трехмерным фазовым пространством.

Литература.

1. Некорин В.И. Нелинейные колебания и волны в нейродинамике. Конференции и симпозиумы, 2008, Т.178, № 3, с.313-323.
2. Клиньшов В.В., Некорин В.И. Переустановка фазы сложных автоколебаний импульсным воздействием. Письма в ЖЭТФ, том 87, вып.2, с 85-89.
3. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюркина Л.В. Стабилизация внешними импульсами и синхронный отклик в системе Рёсслера до порога

- бифуркации седло-узел. Нелинейная динамика, 2009, Т.5, № 2, с 253-264.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.:Физматлит, 2006.
 5. Kandel E.R., Schwartz J.H., Jessell T.M. McGraw-Hill, 2000. Vol. 4, № 22. P. 1414.
 6. 2. Nicholls J.G. et al. From Neuron to Brain // From Neuron to Brain / ed. Associates S.
 7. Sinauer, 2001. P. 580 S.