Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа
и автоматического управления

АНАЛИЗ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЛОКИРОВКАМИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Быстрова Артема Станиславовича

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент И. Е. Тананко

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент И. Е. Тананко

Саратов 2018 год

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания с блокировками являются удобными математическими моделями конвейерного производства, транспортных систем и других дискретных стохастических систем с последовательным обслуживанием, конечными очередями и с возможным блокированием на определенных этапах обслуживания. Научные работы, посвященные системам массового обслуживания с блокировками, сводятся к исследованию их свойств и разработке методов анализа [1]. Примером системы обслуживания с блокировками является двухфазная система обслуживания, в которой отсутствует очередь во второй фазе обслуживания.

Целью данной работы является исследование открытой двухфазной системы массового обслуживания с возможностью блокирования требований в первой фазе, изучение метода анализа, разработка алгоритма и программы для анализа систем обслуживания такого класса.

Данная работа состоит из 4 глав. В первой главе изложены основные элементы теории массового обслуживания. Рассматриваются несколько простых систем массового обслуживания.

Во второй главе описывается многофазовое обслуживание. Рассматривается двухфазная система массового обслуживания с блокировками. Описывается процесс поступления требований, описываются особенности функционирования данной системы.

В третьей главе приводится алгоритм анализа двухфазной системы массового обслуживания с блокировками. Он представлен в виде блок-схемы и дается описание каждого блока. Приводятся формулы для нахождения основных характеристик системы обслуживания.

В четвертой главе приводится назначение и описание программы, дается список идентификаторов в программе и соответствующие им величины в алгоритме метода анализа системы массового обслуживания с блокировками. Также в данном блоке приводятся результаты экспериментов, проведенных с помощью разработанной программы.

1 Основное содержание работы

Введение содержит общую характеристику работы.

В первой главе представлен обзор основных понятий теории массового обслуживания, а именно: введены основные параметры и характеристики систем массового обслуживания, описаны случайные последовательности требований, рассмотрены несколько простых систем массового обслуживания, а также рассмотрено экспоненциальное распределение случайной величины:

Непрерывная случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если функция распределения имеет вид

$$F(t) = P\{\xi < t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \;\; t \geq 0.$$

Соответствующая функция плотности распределения

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \;\; , t \geq 0.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}; \quad var\, \xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Экспоненциальное распределение имеет свойство отсутствия памяти, которое ставит его на одно из центральных мест в теории массового обслуживания.

Непрерывная случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если функция распределения имеет вид

$$F(t) = P\{\xi < t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \;\; t \geq 0.$$

Соответствующая функция плотности распределения

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \;\; , t \geq 0.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}; \quad var\, \xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Экспоненциальное распределение имеет свойство отсутствия памяти, которое ставит его на одно из центральных мест в теории массового обслуживания [3,4,8,11-20].

Вторая глава посвящена описанию многофазового обслуживания. В первом разделе приводятся необходимые теоремы, а также описывается функционирование двухфазной системы [2,3,7,9]. Во втором разделе описывается функционирование двухфазной системы массового обслуживания и метод анализа [5].

Обозначим число требований в системе:

в первой фазе $n_1 = 0, 1, 2, ...,$

во второй фазе $n_2 = 0, 1.$

Вероятности возможных состояний системы обозначим так:

$P_{n1,0}$ - вероятность того, что в первой фазе имеется $n_1 = n$ требований, а во второй фазе $n_2 = 0$;

$P_{n1,1}$ - вероятность состояния, при котором в первой фазе находится $n_1 = n$, а во второй фазе $n_2 = 1$ требование.

$P^{б}_{n_1,1}$ - вероятность того, что в первой фазе имеется $n_1 = n$ требований, а во второй фазе имеется одно требование и система заблокирована.

Уравнения состояния системы записываются в таком виде:

$$\frac{dP_{0,0}(t)}{dt} = -\lambda P_{0,0}(t) + \mu_2 P_{0,1}(t),$$

$$\frac{dP_{n_1,0}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1)P_{n_1,0}(t) + \mu_2 P_{n_1,1}(t) + \lambda P_{n_1-1,0}(t),\ n_1 = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{dP_{0,1}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P_{0,1}(t) + \mu_1 P_{1,0}(t) + \mu_2 P^{б}_{1,1}(t),$$

$$\frac{dP_{n_1,1}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{n_1,1}(t) + \mu_2 P^{б}_{n_1+1,1}(t) + \lambda P_{n_1-1,1}(t) + \mu_1 P_{n_1+1,0}(t),\ n_1 = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{dP^{б}_{1,1}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P^{б}_{1,1}(t) + \mu_1 P_{1,1}(t),$$

$$\frac{dP^{б}_{n_1,1}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2)P^{б}_{n_1,1}(t) + \mu_1 P_{n_1,1}(t) + \lambda P^{б}_{n_1-1,1},\ n_1 = 2, 3, \dots .$$

Нормирующее условие:

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} P^{б}_{n_1,1} + \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{1} P_{n_1,n_2} = 1.$$

Для стационарного режима функционирования системы массового обслуживания при $t \to \infty$, $P_{ij}(t) \to P_{ij}$, $P'_{ij}(t) \to 0$ система дифференциальных уравнений преобразуется в систему алгебраических уравнений

$$\lambda P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1},$$

$$(\lambda + \mu_1)P_{n_1,0} = \mu_2 P_{n_1,1} + \lambda P_{n_1-1,0}, n_1 = 1, 2, \dots,$$

$$(\lambda + \mu_2)P_{0,1} = \mu_1 P_{1,0} + \mu_2 P^{б}_{1,1},$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{n_1,1} = \mu_2 P^{б}_{n_1+1,1} + \lambda P_{n_1-1,1} + \mu_1 P_{n_1+1,0},\ n_1 = 1, 2, \dots,$$

$$(\lambda + \mu_2)P^{б}_{1,1} = \mu_1 P_{1,1},$$

$$(\lambda + \mu_2)P^{б}_{n_1,1} = \mu_1 P_{n_1,1} + \lambda P^{б}_{n_1-1,1}, n_1 = 2, 3, \dots .$$

и нормирующее условие

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} P^{б}_{n_1,1} + \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{1} P_{n_1,n_2} = 1.$$

Та же система уравнений при $n_1 = 0$ будет выглядеть так:

$$\lambda P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1},$$

$$(\lambda + \mu_2)P_{0,1} = \mu_2 P_{0,б} + \mu_1 P_{1,0},$$

$$(\lambda + \mu_2)P_{0,б} = \mu_1 P_{1,1}.[6]$$

Вероятность состояния, при котором в обеих фазах нет требований:

$$P_{00} = \frac{\beta(1+\beta)(1-\alpha_2) - \alpha_2}{\beta(1+\beta+\alpha_2)},$$

где

$$\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2}; \alpha_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$$

при $\mu_1 \geq \mu_2$, $\mu_2 > \lambda$.

Вероятность того, что во второй фазе одно требование:

$$P_{n_1,1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1,1} = \alpha_2 \frac{1+\beta(1-\alpha_2)}{1+\beta+\alpha_2}.$$

Вероятность того, что первая фаза заблокирована:

$$P_{n_1,1}^{б} = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1,1}^{б} = \alpha_2^2 \frac{1+\beta}{1+\beta+\alpha_2}.$$

Вероятность того, что система будет работать без перебоев:

$$P = 1 - P_{n_1,1}^{б}.$$

Производительность системы:

$$N = \lambda P.$$

Особенность работы такой системы в том, что она иногда находится на грани выхода из стационарного режима. Если увеличивать постепенно интенсивность входящего потока до тех пор, пока перед первой фазой не будет всегда существовать какая-то определенная очередь, но еще не растущая до бесконечности, то вероятность состояния $P_{00} \to \infty$ при некотором $\lambda = \lambda_m$ (где λ_m – максимальное значение). При дальнейшем усилении интенсивности входящего потока система выйдет из установившегося состояния.

$$\lambda_m = \mu_2 \alpha_{2_m} = \mu_1 \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}.$$

Максимальное значение коэффициента использования первой фазы равно:

$$\alpha_{1m} = \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2} < 1.$$

Можно показать, что наибольшее значение λ_m получается при условии $\beta = 1$ (при $\mu_1 = \mu_2$). В этом случае $\lambda_m = \frac{2}{3}$.

Если задано

$$T_{обс} = \bar{t}_{обс1} + \bar{t}_{обс2},$$

где $\bar{t}_{обс1}$, $\bar{t}_{обс\,2}$ – среднее значение времени обслуживания требований в первой и второй фазах соответственно, то входящий поток требований не должен превосходить величины

$$\lambda_m = \frac{4}{3T_{обс}},$$

и в этом случае наибольшее значение λ_m получается при $\beta = 1$, т.е. при $\mu_1 = \mu_2$.

В третьей главе дано подробное описание алгоритма анализа двухфазной системы массового обслуживания с блокировками. Данный алгоритм имеет блочную структуру и состоит из 4 последовательно выполняемых блоков.

Блок 1. Ввод исходных данных

Входные данные:

λ – интенсивность входящего потока;

μ_1 – интенсивность обслуживания первой фазы;

μ_2 – интенсивность обслуживания второй фазы.

Блок 2. Проверка входных данных

λ, μ_1, μ_2 должны быть положительными вещественными числами, такими чтобы выполнялось условие

$$\mu_1 \geq \mu_2,\ \mu_2 > \lambda.$$

В случае некорректных введенных значений программа выдаст сообщение об ошибке и предложит ввести новые значения.

Блок 3. Вычисление стационарных характеристик

Вычислить

$P_{00} = \frac{\beta(1+\beta)(1-\alpha_2)-\alpha_2}{\beta(1+\beta+\alpha_2)}$ – вероятность состояния, при котором в обеих фазах нет требований;

$P_{n_1,1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_{1,1}} = \alpha_2 \frac{1+\beta(1-\alpha_2)}{1+\beta+\alpha_2}$ – вероятность того, что во второй фазе одно требование;

$P_{n_1,1}^{б} = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1,1}^{б} = \alpha_2^2 \frac{1+\beta}{1+\beta+\alpha_2}$ – вероятность того, что первая фаза заблокирована;

$P = 1 - P_{n_1,1}^{б}$ – вероятность того, что система будет работать без перебоев;

$N = \lambda P$ – производительность системы;

$\lambda_m = \mu_2 \alpha_{2_m} = \mu_1 \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$ – максимальное значение интенсивности входящего потока;

$\alpha_{1m} = \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2} < 1$ – максимальное значение коэффициента использования первой фазы;

$\bar{t}_{обс1} = \frac{1}{\mu_1}$, $\bar{t}_{обс2} = \frac{1}{\mu_2}$ – среднее значение времени обслуживания требований в первой и второй фазах соответственно;

$T_{обс} = \bar{t}_{обс1} + \bar{t}_{обс2}$ – среднее время обслуживания требования системой.

Блок 4. Вывод результатов

Вывести вычисленные характеристики как результат анализа системы. Данные выводятся на экран и в текстовый файл.

Четвертая глава посвящена разработанной программе, которая предназначена для вычисления стационарных характеристик двухфазной системы массового обслуживания с блокировками. Дано описание идентификаторов, входных данных. Проведено несколько экспериментов, а именно:

Эксперимент 1.

Пусть: $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$.

Исследование зависимости вероятности блокировки первой фазы от λ. С увеличением λ увеличивается вероятность блокировки первой фазы.

Исследование зависимости производительности системы от λ. С увеличением λ увеличивается производительность системы.

Исследование зависимости вероятности того, что в системе нет требований от λ. При увеличении λ вероятность того, что в системе нет требований заметно уменьшается.

Эксперимент 2.

Пусть: $\lambda = 1$, $\mu_2 = 2$.

Исследование зависимости вероятности блокировки первой фазы от μ_1. При μ_1 вероятность блокировки фазы увеличивается незначительно.

Исследование зависимости максимального значения коэффициента использования первой фазы от μ_1. При увеличении μ_1 незначительно уменьшается максимальный коэффициент использования первой фазы.

Исследование зависимости вероятности того, что в системе нет требований от μ_1. При увеличении μ_1 увеличивается вероятность того, что в системе нет требований.

Эксперимент 3.

Пусть: $\lambda = 1$, $\mu_1 = 3$.

Исследование зависимости вероятности блокировки первой фазы от μ_2. При увеличении μ_2 вероятность блокировки первой фазы значительно уменьшается.

Исследование зависимости вероятности того, что в системе нет требований от μ_2. При увеличении μ_2 незначительно увеличивается вероятность того, что в системе нет требований.

Исследование зависимости среднего времени обслуживания второй фазой и среднего времени обслуживания системой от μ_2. При увеличении μ_2 уменьшается среднее время обслуживания второй фазой и среднее время обслуживания системой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было представлено описание системы массового обслуживания с блокировками; был описан метод анализа такой системы; составлена программа. Предложенный метод анализа систем обслуживания обеспечивает возможность исследования свойств систем этого класса для решения задач, связанных анализом, проектированием и модификацией дискретных стохастических систем с блокировками.

В ходе данной работы был разработан алгоритм описанного метода анализа двухфазных систем массового обслуживания с блокировками; была составлена блок-схема данного алгоритма, подробно описаны все входящие в неё блоки. По этому алгоритму была разработана программа для анализа систем массового обслуживания с блокировками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995, 529 стр.

2 Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. Пер. с англ. Е.Г. Коваленко. М.: Связь, 1966, 183 стр.

3 Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Пер. с англ. – М.: Изд-во «Советское радио», 1965, 510 стр.

4 Вольберг О.А. Задача о стационарной и нестационарной очередях. «Доклады АН СССР», т. 24, № 7, 1939, с.656-661.

5 Новиков О.А., Петухов С.И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М.: Изд-во «Советское радио», 1969, 400 стр.

6 Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения / Пер. с фран. – М.: Мир, 1965, 303 стр.

7 Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964, 576 стр.

8 Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003, 512стр.

9 Кокс Д.Р., Смит У.Л. Теория очередей. М.: Изд-во МИР, 1966, 218стр.

10 Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями / Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1979, 600 стр.

11 Митрофанов Ю.И. Анализ сетей массового обслуживания: учеб. пособие. Саратов: Научная книга, 2005, 175 стр.

12 Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004, 228 стр.

13 Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1966. – 432 с.

14 Кениг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания / Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1981. – 128 с.

15 Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высш. школа, 1982. – 256 с.

16 Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

17 Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1989. – 336 с.

18 Климов Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 328 с.

19 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 499 с.

20 Жожикашвили В. А., Вишневский В. М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ.– М.: Радио и связь, 1988.– 192 с.