Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа
и автоматического управления

Анализ линейных стохастических сетей

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Грицковой Анастасии Владимировны

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент В. И. Долгов

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент И. Е. Тананко

Саратов 2018

Введение

Актуальность темы. Исследование линейных стохастических сетей массового обслуживания, как часть теории массового обслуживания и элемент системного анализа, является значимым направлением развития теории массового обслуживания. Работы, исследующие линейные стохастические сети, сводятся к изучению свойств и последующей разработке методов анализа систем и сетей массового обслуживания с изменяемыми во времени параметрами [1−8]. Примером таких исследований является анализ многочисленных реальных объектов, в которых требования последовательно проходят несколько систем массового обслуживания с неограниченными длительностями ожидания и очередями. Представленные в теории сетей массового обслуживания модели и методы достаточно просто и наглядно демонстрируют поведение реальных объектов, что позволяет экономить ресурсы при проектировании и разработке реальных объектов и избегать большинства ошибок проектирования сетей, а также позволяет оптимизировать уже спроектированные и функционирующие сети.

Цель бакалаврской работы – разработка программы для анализа открытых и замкнутых линейных стохастических сетей массового обслуживания.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

– изучение линейных стохастических сетей и методов их анализа;

– разработка алгоритма анализа открытых и замкнутых линейных стохастических сетей;

– разработка программы для анализа открытых и замкнутых линейных стохастических сетей;

– проведение численных экспериментов с разработанной программной системой для исследования гипотетических линейных стохастических сетей.

Методологические основы. Описание линейных стохастических сетей массового обслуживания и вывод стационарных характеристик таких сетей представлены в работах Кофмана А. [2], Клейнрока Л. [3], Митрофанова Ю. И. [10].

Теоретическая и/или практическая значимость бакалаврской работы заключается в разработке алгоритма и программы для анализа линейных стохастических сетей, вычислении стационарных характеристик рассматриваемого типа сетей, исследовании и оптимизации модели по полученным данным.

Структура и объем работы. Настоящая работа представлена введением, тремя разделами, заключением, списком использованных источников и двумя приложениями. Общий объем работы 61 страница, из них 41 страница – основное содержание, включая 12 таблиц и 2 рисунка, 20 страниц приложений, список использованных источников – 20 наименований.

Раздел 1. В данном разделе представлено общее описание линейных стохастических сетей, их структура и свойства, приведены теоремы, результатами которых являются аналитические формулы для вычисления стационарных распределений для сетей данных классов.

Раздел 2. В данном разделе описаны алгоритмы методов анализа линейных стохастических сетей обслуживания, приведены блок-схемы алгоритмов и подробные описания блоков алгоритмов для сетей, описанных в работе.

Раздел 3. Содержит основные сведения о программной реализации алгоритмов анализа открытых и замкнутых линейных стохастических сетей, численные эксперименты с разработанными программными моделями сетей обслуживания.

Основное содержание работы

Введение работы содержит в себе общие положения работы.

Раздел 1 «Линейные стохастические сети массового обслуживания» содержит общее описание открытых и замкнутых сетей массового обслуживания.

Сети массового обслуживания строятся путем соединения конечного числа M систем массового обслуживания и внешнего источника. Требования, выходящие из системы $C_i \, (i = 0,1,2,\dots,M)$ с постоянной вероятностью θ_{ij} $(j = 0,1,2,\dots,M)$, поступают в систему C_j (если $j = 1,2,\dots,M$) или покидают сеть $(j = 0)$. Требования из внешнего источника поступают в сеть, вероятность того, что какое-нибудь из этих требований поступит в систему C_j (если $j = 1, 2, \dots, M$), равна θ_{0j}. Такая сеть будет открытой. В замкнутой сети количество требований N, циркулирующих по сети, фиксировано.

Вероятность поступления требований в систему j в течение интервала $(t, t+dt)$ является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами θ_{ij} вероятностей выхода требований из разных систем сети. Описанные сети называются линейными стохастическими сетями.

Каждая система C_i содержит κ_i одинаковых приборов, обслуживающих требования одного класса, длительность обслуживания требований одним прибором имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i. Выбор в C_i очередного требования на обслуживание производится из общей неограниченной очереди согласно дисциплине *FCFS*

Состояние сети описывается вектором $n = (n_i)\,, i = 1, \dots, L\,, n_i = 0,1,2,\dots$. Переходы требований между системами в процессе функционирования сети определяются неприводимой маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ij})$ для открытой сети $i, j = 0,1,\dots,L$, для замкнутой $i, j = 1,\dots,L$.

Введем в рассмотрение вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_L)$, где $\omega_i -$ вероятность поступления в систему C_i некоторого помеченного требования при его очередном переходе в сети. Вектор ω является одним из решений системы уравнений

$$\omega \Theta = \omega \tag{1}$$

с условием нормировки $\sum_{i=1}^{L} \omega_i = 1$.

Величины ω_i пропорциональны λ_i, т. е. для открытой сети

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}.$$

Из (1) следует, что интенсивность входящего потока λ_i находится по следующей формуле:

$$\lambda_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}\lambda_0 . \qquad (2)$$

Для того чтобы существовал стационарный режим, каждая система сети должна удовлетворять условию

$$\lambda_i < \mu_i \quad \text{или} \quad \psi_i < 1, \qquad (3)$$

где λ_i – интенсивность входящего потока требований в C_i, а ψ_i – коэффициент использования системы C_i равный

$$\psi_i = \frac{\lambda_i}{\kappa_i \mu_i}. \qquad (4)$$

В основе метода анализа открытых сетей лежит известная теорема Джексона, согласно которой каждая система, входящая в сеть, рассматривается как независимая с входящим в неё пуассоновским потоком требований [10]. С помощью данной теоремы находится вероятность пребывания сети в состоянии $n = (n_1, \ldots, n_L)$:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{L} P_i(n_i), \quad n \in E, \quad E = \{0,1,2,\ldots\}, \qquad (5)$$

где

$$P_i(n_i) = P_i(0)\prod_{m=1}^{n_i} \frac{\lambda_i}{\alpha_i(m)\mu_i}, \qquad (6)$$

$$\alpha_i(m) = \min\{m, \kappa_i\}, m \geq 1. \qquad (7)$$

Теорема Джексона показывает, что уравнения равновесия могут быть записаны в виде [10]:

$$\left[\lambda_0 + \sum_{j=1}^{L} \varepsilon(n_j)\alpha_j(n_j)\mu_j\right] P(n) =$$

$$= \lambda_0 \sum_{j=1}^{L} \varepsilon(n_j)\theta_0 p(n(n_j - 1)) + \sum_{j=1}^{L} \alpha_j(n_j + 1)\mu_j \theta_{j0} P(n(n_j + 1)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{L} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{L} \varepsilon(n_j)\alpha_i(n_i + 1)\mu_i \theta_{ij} P(n(n_i + 1, n_j - 1)). \qquad (8)$$

При анализе сетей обслуживания многие стационарные характеристики сетей выражаются через стационарные вероятности состояний (7).

Вероятность пребывания в C_i 0 требований:

$$P_i(0) = \left[\frac{(\kappa_i \psi_i)^{\kappa_i}}{\kappa_i!(1-\psi_i)} + \sum_{n=0}^{\kappa_i - 1} \frac{(\kappa_i \psi_i)^n}{n!} \right]^{-1}. \quad (9)$$

Математические ожидание числа требований, ожидающих обслуживания в очереди системы C_i:

$$\overline{b_i} = P_i(0) \frac{{k_i}^{k_i} {\psi_i}^{k_i+1}}{k_i!(1-\psi_i)^2}. \quad (10)$$

Математическое ожидание числа занятых приборов в системе C_i:

$$\overline{h_i} = \psi_i \kappa_i. \quad (11)$$

Математическое ожидание числа свободных приборов в системе C_i:

$$\overline{g}_i = (1-\psi_i)\kappa_i. \quad (12)$$

Математическое ожидание числа требований в системе C_i:

$$\overline{n_i} = \overline{b_i} + \overline{h_i}. \quad (13)$$

Математическое ожидание длительности пребывания требований в системе C_i:

$$\overline{u_i} = \overline{n_i} / \lambda_i. \quad (14)$$

Математическое ожидание длительности ожидания требований в очереди в системе C_i:

$$\overline{w_i} = \overline{b_i} / \lambda_i. \quad (15)$$

Математическое ожидание длительности пребывания требования в сети:

$$\overline{\tau} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \overline{u}_i. \quad (16)$$

Для анализа замкнутых сетей используется рекурсивный метод анализа сетей массового обслуживания.

Эволюция сети описывается цепью Маркова с непрерывным временем и конечным множеством состояний

$$S(N,L)=\left\{n=(n_1,\ldots,n_L)\mid n_i\ge 0, i=1,\ldots,L,\ \sum_{i=1}^{L}n_i=N\right\}, \tag{17}$$

где n_i – число требований, пребывающих в системе C_i.

Мощность $S(N,L)$ равна $\binom{N+L-1}{L-1}$.

Будем обозначать через $P(n)$ стационарную вероятность пребывания сети в состоянии $n=(n_1,...,n_L)$, и вспомогательные функции

$$\varepsilon(n_i)=\begin{cases}0, & \text{если } n_i=0,\\ 1, & \text{если } n_i>0;\end{cases}$$

$$\alpha_i(n_i)=\min(n_i,\kappa_i),\quad n_i=1,\ldots,N.$$

Уравнения равновесия могут быть записаны в виде [10, 12]:

$$\left[\sum_{j=1}^{L}\varepsilon(n_j)\alpha_j(n_j)\mu_j\right]P(n_1,\ldots,n_L)=$$

$$=\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\varepsilon(n_j)\alpha_i(n_i+1)\mu_i\theta_{ij}P(n_1,\ldots,n_i+1,\ldots,n_j-1,\ldots,n_L). \tag{18}$$

Стационарные вероятности $P(n)$ состояний сети, являющиеся решением системы (18), имеют мультипликативную форму [10, 12]:

$$P(n)=P(n_1,n_2,\ldots,n_L)=\frac{1}{G(N,L)}\prod_{i=1}^{L}f_i(n_i), \tag{19}$$

где:

$f_i(n_i)$ – величина, пропорциональная вероятности того, что система C_i находится в состоянии n_i (в C_i пребывает n_i требований),

$$f_i(n_i)=\frac{x_i^{n_i}}{\prod_{m=1}^{n_i}\alpha_i(m)}, \tag{20}$$

$$x_i = \frac{\omega_i}{\mu_i}; \tag{21}$$

$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_L)$ – решение системы уравнений $\omega\Theta = \omega$ с условием нормировки $\sum_{i=1}^{L} \omega_i = 1$;

$G(N, L)$ – нормализующая константа, определяемая равенством:

$$G(N, L) = \sum_{n \in S(N,L)} \prod_{i=1}^{L} f_i(n_i). \tag{22}$$

В общем случае, практический интерес представляет использование метода для частного случая, когда системы C_i сети являются либо одноприборными $(\kappa_i = 1)$, либо содержат не менее N приборов $(\kappa_i \ge N)$. В этом случае $\overline{u}_{i|Y}$ вычисляется по формуле

$$\overline{u}_{i|Y} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i}(\overline{n}_{i-1|Y} + 1), & \text{если} \quad \kappa_i = 1, \\ \frac{1}{\mu_i}, & \text{если} \quad \kappa_{\text{i}} \ge N, \end{cases} \tag{23}$$

при начальном условии $\overline{n}_{i|0} = 0$, $i = 1, ..., L$, где $\overline{n}_{i|Y}$ – математическое ожидание числа требований в системе C_i, при условии, что в сети находится Y требований, $0 \le Y \le N$.

В рекурсивном методе необходимым выражением для определения стационарных характеристик сети является рекуррентное выражение (23) для математического ожидания длительности пребывания требований в системах C_i $i = 1, \ldots, L$, при условии, что в сети находится Y, $Y = 0, 1, ..., N$ требований.

В результате стационарные характеристики сети выражаются через $\overline{u}_{i|N}$ следующим образом:

Математическое ожидание числа требований в системе C_i, при условии, что в сети находится Y требований:

$$\overline{n}_{i|Y} = \omega_i \overline{u}_{i|Y} Y \Big/ \sum_{j=1}^{L} \omega_j \overline{u}_{j|Y} \ , \tag{24}$$

Математическое ожидание числа требований ожидающих в очереди в системе C_i:

$$\overline{b}_{i|N} = \overline{n}_{i|N} \overline{w}_{i|N} \big/ \overline{u}_{i|N} \ . \tag{25}$$

Математическое ожидание числа занятых приборов в системе C_i:

$$\overline{h}_{i|N} = \overline{n}_{i|N} - \overline{b}_{i|N} \, . \tag{26}$$

Математическое ожидание длительности ожидания требований в очереди в системе C_i:

$$\overline{w}_{i|N} = \overline{u}_{i|N} - 1/\mu_i \ . \tag{27}$$

Интенсивность входящего потока требований системе C_i:

$$\lambda_{i|N} = \overline{h}_{i|N} \mu_i \, . \tag{28}$$

Коэффициент использования в системе C_i:

$$\psi_{i|N} = \overline{h}_{i|N} \big/ \kappa_i \ . \tag{29}$$

Математическое ожидание длительности пребывания требования в сети:

$$\overline{\tau}_{i|N} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{L} \omega_j \overline{u}_{i|N} \ . \tag{30}$$

Раздел 2 «Алгоритмы для анализа линейных стохастических сетей массового обслуживания» содержит в себе подробное описание алгоритмов анализа открытых и замкнутых линейных стохастических сетей. Алгоритмы имеют блочную структуру.

В начале алгоритма определяется тип сети обслуживания: открытая или замкнутая.

Для открытой сети:

– вводятся исходные данные:

L – число систем сети;

$\kappa = (\kappa_i)$, $i = 1,...,L$, – вектор числа приборов в системах сети;

λ_0 – интенсивность входящего потока требований из источника;

$\mu = (\mu_i)$, $i = 1,...,L$, – вектор интенсивностей обслуживания требований в системах сети обслуживания;

$\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 0,1,..., L$, – маршрутная матрица;

– находится вектор $\omega = (\omega_i)$, $i = 1,...,L$, из решения системы уравнений (1);

– вычисляется вектор $\lambda = (\lambda_i)$, $i = 1,...,L$, по формуле (2);

– проверяется существование стационарного режима по условию (3);

– определяются стационарные характеристики открытой сети по формулам (9-16);

– выводятся полученные результаты.

Для замкнутой сети:

– вводятся исходные данные:

L – число систем сети,

$\kappa = (\kappa_i)$, $i = 1,...,L$, – вектор числа приборов в системах сети;

N – число требований одного класса, пребывающих в сети (для замкнутой сети;

$\mu = (\mu_i)$, $i = 1,...,L$, – вектор интенсивностей обслуживания требований в системах сети обслуживания;

$\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1,..., L$, – маршрутная матрица;

– находится вектор $\omega = (\omega_i)$, $i = 1,...,L$, из решения системы уравнений (1);

– вычисляются $\overline{u}_{i|Y}$ и $\overline{n}_{i|Y}$ по формулам (23) и (24);

– определяются стационарные характеристики сети по формулам (25-30);

– выводятся полученные результаты.

Раздел 3 «Назначение и описание программ анализа линейных стохастических сетей массового обслуживания» содержит в себе описание идентификаторов программы, примеры использования разработанной программы, предназначенной для вычисления стационарных характеристик. Программа реализована на языке на языке программирования C# в среде разработки Visual Studio 2015. Основой программы служит Windows Forms Application. Это интерфейс программирования приложений (API), отвечающий за графический интерфейс пользователя и являющийся частью Microsoft .NET Framework.

Заключение

Рассмотренные в работе типы линейных стохастических сетей массового обслуживания могут быть использованы в качестве моделей при организации различных сетей, как с произвольным, так и с фиксированным объемом требований [9]. В ходе выпускной квалификационной работы была разработана программа для анализа линейных стохастических сетей массового обслуживания; были приведены алгоритмы методов анализа линейных стохастических сетей, позволяющие получить основные стационарные характеристики сетей данного класса. Также были представлены структурные схемы алгоритмов, подробно описан каждый из составляющих алгоритма блоков, приведены программная реализация представленных алгоритмов и анализ полученных данных.

Условия рассмотренной сети можно распространить на случай непуассоновских систем и систем с преимуществами; тогда для решения задач нужно обратиться к моделированию на ЭВМ, но аналитический подход дает возможность получить более точную оценку [11]. По результатам моделирования можно провести статистическое исследование, с целью выявления наиболее оптимальных параметров построения и функционирования учреждения. Моделирование предоставляет большие возможности для анализа и проигрывания различных ситуаций в системах массового обслуживания. Использование математических моделей обеспечивает лучшее понимание функционирования систем, возможность принятия соответствующих решений по их модификации, позволяя, таким образом, повысить эффективность их функционирования или даже приблизить его к оптимальным [13-20].

Список использованных источников

1. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. М. : Наука, ГРФМЛ, 1966. 432 с.

2. Карташевский В. Г. Основы теории массового обслуживания: учебник для вузов / В. Г. Карташевский. М. : Горячая линия, Телеком, 2013. 130 с.

3. Кофман, А. Массовое обслуживание. Теория и приложения / А. Кофман, Р. Крюон ; пер. с франц. В. И. Неймана и В. П. Швальба под ред. И. Н. Коваленко. М. : Мир, 1965. 302 с.

4. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок ; пер. с англ. И. И. Грушко под ред. В. И. Нейман. М. : Машиностроение, 1979. 432 с.

5. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения / Т. Л. Саати ; пер. с англ. под ред. И. Н. Коваленко и Р. Д. Когана. М. : Советское радио, 1965. 510 с.

6. Ивченко, Г. И. Теория массового обслуживания / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. М. : Машиностроение, 1979. 432 с.

7. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок ; пер. с англ. под ред. Б. С. Цыпакова. М. : Мир, 1979. 600 с.

8. Бочаров, П.П. Теория массового обслуживания: Учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин, М. : Изд-во РУДН, 1995. 529 с.

9. Ивченко Г. И. Теория массового обслуживания: Учебное пособие для вузов / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н Коваленко. М. : Высшая школа, 1982. 256 с.

10. Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания : Учебное пособие для студентов университетов / Ю. И. Митрофанов. Саратов : Научная книга, 2004. 175 с.

11. Долгов, В.И. Методы анализа сетей массового обслуживания : Учебно-методическое пособие. / В.И. Долгов. Саратов : Научная книга, 2009. 32 с.

12. Вишневский, В.М. Теоретические основы построения компьютерных сетей / В.М. Вишневский. М. : Техносфера, 2003. 512 с.

13. Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и способы расчета / Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Я. А. Коган. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 336 с.

14. Башарин, Г. П. Теория сетей массового обслуживания и её приложения к анализу информационно-вычислительных систем / Г. П. Башарин, А. Л. Толмачев. М. : ВИНИТИ, 1983. Т.21. С. 3–119.

15. Новиков, О. А. Прикладные вопросы теории массового обслуживания / О. А. Новиков, С. И. Петухов. М. : Советское радио, 1969, 400 с.

16. Павский В. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / В. А. Павский. К. : Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2008. 116 с.

17. Фокина Н. П. Метод управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной топологией / Н. П. Фокина, И. Е. Тананко // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, Саратов, 2013. 82–88.

18. Уолренд Дж. Введение в теорию массового обслуживания / Дж. Уолдренд ; пер. с англ. Г. С. Икрамова, А. Л. Толмачева под ред. В. Ф. Матвеева. М. : Мир, 1993. 366 с.

19. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / В. Феллер; пер. с англ. Р. Л. Добрушина, А. А. Юшкевича, С. А. Молчанова. М. : Мир, 1967. Т 1-2.

20. Сурмин Ю.П. Теория систем и системный анализ : учебное пособие / Ю. П. Сурмин. К. : МАУП, 2003. 368 с.