Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа
и автоматического управления

Исследование работы автомастерской с использованием моделей массового обслуживания

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Федорова Дмитрия Владимировича

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент Н.П. Фокина

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент И. Е. Тананко

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Теория массового обслуживания является одним из разделов математики, позволяющим исследовать реальные системы с элементами случайностей, функционирование которых представляет собой случайную последовательность однородных событий. Простота и естественность отображения элементов реальной системы и процессов ее функционирования моделями массового обслуживания делает аппарат теории массового обслуживания эффективным инструментом исследования. Используемыми математическими моделями являются системы и сети массового обслуживания различных типов, позволяющие отображать различные аспекты функционирования исследуемой системы или процесса. Примерами реальных систем, которые естественным образом отображаются моделями массового обслуживания, являются вычислительные сети, системы обслуживания поступающих клиентов, такие как магазины, станции техобслуживания, банки, ремонтные мастерские и т.п.[1, 3, 5].

Целью выпускной квалификационной работы являлось исследование работы автомастерской методами теории массового обслуживания. В качестве модели для исследования работы реальной системы предполагалось использование замкнутой системы массового обслуживания соответствующего типа. Замкнутые системы характеризуются конечным числом источников требований (ресурсов), требующих обслуживание [3, 6].

В рамках данной работы были сформулированы **следующие задачи**:

1) Изучение различных видов замкнутых экспоненциальных систем массового обслуживания: многоприборных с ожиданием, с ожиданием и потерями и двухфазных.

2) Разработка алгоритма анализа замкнутых экспоненциальных систем массового обслуживания рассмотренных видов.

3) Разработка программы анализа замкнутых экспоненциальных систем массового обслуживания различных видов.

4) Применение методов массового обслуживания для анализа работы автомастерской: построение модели в виде замкнутой системы массового обслуживания соответствующего вида и обоснование ее применения.

5) Проведение исследования работы автомастерской с использованием разработанной программы. Решение задачи оптимизации целевой функции затрат на функционирование исследуемой системы.

Методологические основы теории массового обслуживания представлены в работах Кофман А., Крюон Р. [3], Таха Х. [4], Вишневский В. М.[5], Саати Л.Т.[7], Митрофанов Ю.И.[8], Гнеденко Б.В.[9], Карлин С.[10], Клейнрок Л. [11].

Практическая значимость выпускной квалификационной работы в разработке программы для анализа замкнутых систем массового обслуживания, позволяющей проводить исследование систем, моделируемых такими математическими моделями; применение моделей массового обслуживания к анализу работы автомастерской с целью ее оптимизации.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы — 59 страниц, из них 48 страниц — основное содержание, включая 12 рисунков и 2 таблицы, 10 страниц приложения, список использованных источников — 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Замкнутые системы массового обслуживания» содержит описание моделей массового обслуживания, представляющих интерес в данной работе: замкнутых экспоненциальных многоприборных систем с конечной и бесконечной очередями и двухфазной замкнутой системы с приборами разной производительности. Также в этом разделе описана система работы автомастерской и определены задачи ее исследования. Приведены методы анализа рассмотренных систем, содержащие формулы для подсчета их основных стационарных характеристик [13-18].

В первом подразделе дано краткое описание терминов теории массового обслуживания. Для обозначения систем массового обслуживания используется аббревиатура Кендала [4] имеющая вид:

$$A/S/\kappa/B/Z,$$

где A характеризует входящий поток требований;

S – длительность обслуживания на отдельном приборе обслуживания;

к – число одинаковых обслуживающих приборов;

B – число мест ожидания в очереди системы;

Z – число источников, из которых требования поступают на обслуживание в систему. Каждый источник может порождать только одно требование. Системы с конечным числом источников называются замкнутыми.

В последующих двух подразделах рассмотрены модели замкнутых экспоненциальных многоприборных систем массового обслуживания, систем типа $M/M/\kappa/B/Z$. В рассмотренных системах имеется конечное число источников Z требований и κ обслуживающих приборов. Входящий поток требований от каждого источника является пуассоновским с интенсивностью λ, а длительности обслуживания требований каждым прибором имеют экспоненциальное распределение с параметром μ. Требования обслуживаются в порядке поступления. В системе имеется B мест для ожидания в очереди. Состояние системы определяется числом требований n находящихся в ней. Множество состояний замкнутых систем конечно и, поэтому для любых значений параметров систем всегда существует стационарных режим.

Во втором подразделе рассмотрена замкнутая система массового обслуживания $M/M/\kappa/\infty/Z$, длина очереди в которой не ограничена, т.е. $B = \infty$. В случае, когда $\kappa<Z$, эволюция данной системы описывается процессом гибели и размножения с конечным множеством состояний $\{0,\ldots,Z\}$ и интенсивностями переходов

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(Z-n), 0 \le n \le Z, \\ 0, \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n < \kappa, \\ \kappa\mu, & \kappa \le n \le Z. \end{cases}$$

При любых λ и μ процесс гибели и размножения имеет стационарный режим, для которого уравнения состояния имеют вид

$$Z\lambda p_0 = \mu p_1, n = 0 \qquad (1)$$

$$[(Z-n)\lambda + n\mu]p_n = (Z-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1}, n = 1, \dots, \kappa-1, \qquad (2)$$

$$[(Z-n)\lambda + \kappa\mu]p_n = (Z-n+1)\lambda p_{n-1} + \kappa\mu p_{n+1}, n = \kappa, \dots Z-1,$$

$$\kappa\mu p_Z = \lambda p_{Z-1}, n = Z, \qquad (3)$$

где p_n – стационарная вероятность состояния n.

Решение системы уравнений (1)-(3) дается следующими выражениями:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n C_Z^n, & n = 1, \dots, \kappa-1, \\ p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n C_Z^n \frac{n!}{\kappa!} \kappa^{\kappa-n}, & n = \kappa, \dots, Z, \end{cases}$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{\kappa-1} C_Z^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=\kappa}^{Z} C_Z^n \frac{n!\kappa^{\kappa-n}}{\kappa!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)^{-1}.$$

Основые стационарные характеристики системы, такие как математическое ожидание (м.о.) числа требований в системе $\bar{n}$, м.о. числа требований в очереди $\bar{b}$, м.о. числа свободных приборов $\bar{g}$, м.о. числа занятых приборов $\bar{h}$, м.о. длительности пребывания в очереди $\bar{w}$, м.о. длительности пребывания в системе $\bar{u}$, находятся по формулам:

$$\bar{n} = \sum_{\kappa=0}^{Z} \kappa\, p_\kappa, \qquad \bar{b} = \bar{n}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) - Z\frac{\lambda}{\mu}, \qquad \bar{g} = \kappa - \frac{\lambda}{\mu}(Z-\bar{n}),$$

$$\bar{h} = \frac{\lambda}{\mu}(Z-\bar{n}), \qquad \bar{w} = \frac{\bar{n}}{\lambda(Z-\bar{n})} - \frac{1}{\mu}, \qquad \bar{u} = \frac{\bar{n}}{\lambda(Z-\bar{n})}.$$

Определим суммарную стоимость $\gamma(\kappa)$ функционирования в стационарном режиме системы с κ обслуживающими приборами в виде:

$$\gamma(\kappa) = C_1\bar{b} + C_2\bar{g},$$

где C_1 – стоимость ожидания требования в единицу времени, C_2 – стоимость ожидания прибора системы (простоя) в единицу времени. Поскольку при увеличении κ значение $\bar{b}$ увеличивается, а $\bar{g}$ уменьшается, то функция $\gamma(\kappa)$ имеет единственный минимум. Исследование системы может включать определение оптимального числа обслуживающих приборов κ, которое минимизирует функцию стоимости $\gamma(\kappa)$.

Когда к≥Z, то имеет место тривиальный случай, когда можно выделить прибор для каждого требования. Каждый прибор обслуживает только одно определенное требование, приборы действуют независимо друг от друга, и система эквивалентна объединению κ=Z независимых замкнутых систем, каждая из которых содержит только одно требование [19, 20].

В третьем подразделе рассмотрена замкнутая система массового обслуживания типа M/M/к/B/Z, где B – конечно. Данная система является системой с ожиданием и потерями. Если вновь поступившее требование застает систему в состоянии, когда нет свободных мест ожидания в очереди, то требование получается отказ и возвращается в источник без обслуживания.

Поведение данной системы описывается процессом размножения и гибели с интенсивностями переходов

$$\lambda_n = \begin{cases} (Z-n)\lambda, \; n = 0,\dots,B-1, \\ 0, \; n = B,\dots,Z, \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, \quad n = 0,\dots,\kappa, \\ \kappa\mu, \quad n = \kappa+1,\dots,Z. \end{cases}$$

Вероятности пребывания в системе в стационарном режиме n требований определяются равенствами

$$p_n = p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n C_Z^n, \; n = 0,\dots,B-1,$$

$$p_n = p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{\kappa^{n-\kappa}} C_Z^n \frac{n!}{\kappa!}, \; n = B,\dots,Z,$$

где

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{B-1} C_Z^n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=B}^{Z} C_Z^n \frac{n!}{\kappa!\kappa^{n-\kappa}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right)^{-1}.$$

В четвертном подразделе рассматривается двухфазная замкнутая система массового обслуживания, состоящая из двух приборов разной производительности, расположенных последовательно. Время обслуживания приборами требований подчинено экспоненциальному закону распределения с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Поступившее в систему требование должно последовательно пройти две фазы обслуживания и получить обслуживание на первом и втором приборе. Если прибор на любой фазе обслуживания занят, то требование становится в очередь неограниченной длины [3].

В пятом подразделе описывается работа автомастерской по ремонту техники некоторого предприятия, выбирается математическая модель и приводится соответствие параметров модели и исследуемой системы. Предприятие располагает конечным парком машин, при эксплуатации которых требуется профилактика и ремонт. Задача исследования состоит в определении основных характеристик системы и определении оптимального числа механиков, которое минимизирует функцию затрат предприятия по содержанию данного структурного подразделения.

Известно, что предприятие располагает 20 машинами, требующими профилактики и ремонта, среднее число поломок $0{,}408\,\textit{машин}/\textit{сутки}$, среднее число восстановлений машин $1{,}92\,\textit{машин}/\textit{сутки}$, стоимости часа работы механика и часа простоя машины зависят от среднего числа исправных машин f и равны, $C_1 = 12f$, $C_2 = 6f$, соответственно.

Математической моделью, описывающей функционирование автомастерской, является система M/M/к/∞/20. Источники требований соответствуют машинам, требования в обслуживании которых соответствуют требованиям в модели, обслуживающие приборы в модели отображают механиков. Предполагается, что поток поломок от одной машины является пуассоновским с заданной интенсивностью λ, а время обслуживания любым механиком автомастерской есть случайная величина имеющая экспоненциальное распределение с параметром μ. Среднее число исправных машин в модели соответствует м.о. числа требований, находящихся в источниках.

Во втором разделе «Исследование замкнутых систем массового обслуживания» представлена практическая часть работы, приведено описание алгоритма и программы анализа замкнутых систем массового обслуживания, приведены результаты исследования гипотетической автомастерской. В первом подразделе приводится структурная схема и подробное описание блоков алгоритма. Во втором подразделе содержится подробное описание программы для анализа замкнутых систем массового обслуживания различных типов. Программа написана на языке программирования C# в среде разработки Visual Studio 2010. Программа имеет графический интерфейс и позволяет вычислять стационарное распределение вероятностей состояний систем и другие стационарные характеристики. Приведены примеры работы программ для различных типов систем. Проведено исследование работы автомастерской с использованием программы, полученные результаты представлены в виде графиков и таблиц. При заданных параметрах работы автомастерской решена задача оптимизации, найдено оптимальное число механиков минимизирующее функция стоимости. Некоторые результаты исследования приведены в следующей таблице:

к	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ψ	0,999	0,951	0,820	0,687	0,590	0,500
$\bar{n}$	10,59	6,56	4,52	3,81	3,59	3,52
$\bar{b}$	8,58	3,70	1,24	0,38	0,10	0,02
$\bar{g}$	0,002	0,15	0,72	1,57	2,52	3,50
$\bar{w}$	30,75	13,25	4,375	1,375	0,375	0,125
$\gamma(\kappa)$	103	45,3	19,2	14,0	16,3	21,2

Из таблицы видно, что оптимальное число механиков, обеспечивающий минимум функции стоимости при заданных исходных параметрах равно пяти.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью выпускной квалификационной работы было исследование функционирования автомастерской с использованием моделей массового обслуживания. Особенностью рассмотренной автомастерской являлось наличие конечного числа машин для ремонта, которые могут выходить из строя и ремонтироваться. Поэтому в качестве модели описывающей функционирование данной реальной системы была выбрана замкнутая система массового обслуживания, учитывающая данную особенность.

Были рассмотрены различные виды многоприборных замкнутых экспоненциальных систем массового обслуживания: с конечной и неограниченной очередями и с многофазным процессом обслуживания. Для этих типов систем разработаны алгоритмы методов анализа. По разработанным алгоритмам написана программа для анализа замкнутых систем массового обслуживания, которая позволяет вычислять стационарное распределение вероятностей состояний, а так же такие стационарные характеристики, как: математическое ожидание числа требований в системе и в очереди, математическое ожидание длительности пребывания в системе и в очереди и математическое ожидание числа свободных и занятых приборов. Программа так же позволяет вычислять функцию общих затрат в единицу времени, связанных с простоем приборов и ожиданием требований в очереди.

С помощью программы было проведено исследование работы автомастерской, решена задача оптимизации и получено оптимальное число механиков, которое минимизирует функцию стоимости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета/ Г. П. Башарин,П. П. Бочаров, Я. А. Коган.М.: Наука, ГРФМЛ,1989.336 с.
2. Жожикашвили, В. А.Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ / В. А. Жожикашвили, В. М. Вишневский. М.: Радио и связь, 1988. 192с.
3. Кофман, А., Крюон, Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения / А. Кофман, Р. Крюон; пер. с фран.; под ред. И.Н. Коваленко. М. : Мир, 1965. 303с.
4. Таха, Х. Введение в исследование операций / Х. Таха; пер. с англ. А.А. Минько. М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. 912 с.
5. Вишневский, В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневский. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
6. Митрофанов, Ю.И. Анализ систем массового обслуживания / Ю.И. Митрофанов, Е.С. Рогачко, Н.П. Фокина. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2009. 59 с.
7. Саати, Л.Т. Элементы теории массового обслуживания и её приложения / Л.Т. Саати; пер. с англ.; под ред. И.Н.Коваленко, Р.Д. Когана. М.: Советское радио, 1965, 510 с.
8. Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания / Ю. И. Митрофанов. Саратов: Научная книга, 2004.
9. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. М.: Наука, ГРФМЛ, 1966. 432с.
10. Карлин, С. Основы теории случайных процессов /С. Карлин; пер. с англ.; под ред. И. Н. Коваленко. М.: Мир, 1971. 536с.
11. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок; пер. с англ.; под ред. В. И. Неймана. М. : Машиностроение, 1979. 432с.
12. Кемени, Д. Д.Конечные цепи Маркова / Д. Д. Кемени, Д. Л. Снелл;

пер. с англ.; под ред. А. А. Юшкевича. М.: Наука, 1970. 272 с.

13. Кениг,Д., Штойян, Д. Методы теории массового обслуживания/ Д. Кениг, Д. Штойян; пер. с нем.; под ред. Г. П. Климова. М.: Радио и связь, 1981. 128 с.

14. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок; пер. с англ.; под ред. В.С. Цыбакова. М.: Мир, 1979. 600 с.

15. Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. П. Климов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.328 с.

16. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения/ В. Феллер; пер. с англ.; под ред. Е. Б. Дынкина. М.: Мир, 1967. Т. 1. 499 с.

17. Климов, Г. П. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. П. Климов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 328 с.

18. Ивченко, Г. И. Теория массового обслуживания / Г. И.Ивченко, В. А.Каштанов, И. Н. Коваленко. М.: Высш. школа, 1982. 256с.

19. Уолрэнд, Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания / Дж. Уолрэнд; пер. с англ.; под ред. В.Ф. Матвеева. М.: Мир, 1993. 335 с.

20. Саати, Л. Т. Математические методы исследования операций/ Л.Т. Саати; пер. с англ.; под ред. А.П. Гришина. М.: Военное изд-во министерства обороны СССР, 1963.186 с.