Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра: математической экономики

«Использование модели копула для оценки рисков фондовых портфелей»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента ***3 курса 392 группы***
по направлению ***38.04.01 - Экономика***
механико-математического факультета
Шепелева Данилы Викторовича

Научный руководитель
Профессор, д.э.н., профессор ____________________________________ В.А. Балаш

Зав. кафедрой
Профессор, д.ф.-м.н. ____ С.И. Дудов

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Очередной кризис в экономике и финансовой сфере снова указал на дорогую цену ошибки, которую заплатили риск-менеджеры за использование предположения о нормальном законе распределения рисков. В связи с этим в последнее время финансовая наука ищет другие способы моделирования совместного многомерного распределения, в соответствии с наблюдаемыми данными, также проводится изучение их асимметричности и наличия «тяжелых хвостов». Отдельное внимание в последнее время уделяется копулам – функциям, позволяющим получить многомерное распределение из маргинальных, и наоборот, исследовать зависимость маргинальных распределений, полученных из совместного распределения.

Обоснованием актуальности данной работы являются неподготовленность специалистов к резким падениям финансовых рынков, ошибки в расчетах вероятностей кризисов, неверная оценка вероятности падения котировок ценных бумаг, неверная оценка прочих финансовых и страховых рисков. В связи с чем возникла необходимость поиска и дальнейшего применения других методов расчета вероятностей.

Целью настоящей работы является оценивание риска портфеля с помощью копула функций.

Для достижения данной цели выделены следующие задачи:

- Изучить свойства эмпирических распределений доходностей ценных бумаг
- Изучить использование копула функций для описания совместного распределения доходностей
- Выбрать несколько активов (акций) для формирования портфеля и получить данные по их стоимости за определенный период, для последующей работы
- Описать эмпирические свойства распределений данных ценных бумаг за выбранный период

- Определить насколько данные распределения и совместное распределение отличаются от нормального, что послужило причиной для использования копул функции для оценки распределений
- Выбрать несколько видов копул, оценить их параметры к нашему портфелю и выбрать лучшую
- Найти показатель риска для выбранной копулы и заданной структуры портфеля. Рассчитать показатели риска (VaR, CVaR) для выбранной копулы.

Основное содержание

Глава 1. Теория копула функций

Копулой называется n-мерное распределение $C_n(t)$ на n-мерном единичном кубе U^n, все маргинальные распределения которого являются равномерными на отрезке U.

Для случайных величин X_1 и X_2, у которых функции распределения вероятностей определенны на множествах A и B, введем обозначение $x_j(i)$ – i-ая реализация случайной величины j.

Границы Фреше-Хёфдинга определяют минимальную и максимальную границы для всех копул. Верхняя граница равна минимальной из распределений входящих в копулу min(F1,F2,…,Fn). Нижняя граница равна max(0,F1+F2+…+Fn-n+1).

К основным видам копул относятся эллиптические, архимедовы и экстремальные. Также стоит дать определения таким частным случаям, как полноценные и независимые копулы.

Копула является независимой или копулой произведения, если она берется от независимых случайных величин.

Полноценной называется копула, включающая в себя в качестве частных случаев границы Фреше–Хефдинга и случай независимой копулы.

Эллиптическими копула-функциями называются копула функции от распределений, относящихся к эллиптическому типу. К эллиптическим копулам, в частности относят гауссову копулу, а также копулу Стьюдента, с их помощью можно восстановить совместные распределения обладающие свойством симметричности.

Архимедовы копулы были названы так по аналогии с принципом Архимеда. В числе архимедовых моделей копула выделяют подвиды моделей: Клэйтона, Гумбеля, Франка и Али-Микаэля-Хака.

Также существуют класс, так называемых экстремальных копул, это копула функции произошедшие от одномерных законов распределения экстремумов. Существуют модели копул, которые не относятся к вышеперечисленным семействам.

Совместное распределение может моделироваться несколькими методами, в зависимости от возможности оценить копулу и маргинальные распределения параметрическим и непараметрическим способом.

Параметрические методы: при их применении проводят параметризацию и копул и частных распределений. При этом, например, базовый подход MLE (Maximum Likelihood Estimation) одновременно максимизирует и функцию правдоподобия по частным распределениям и по копуле, а метод «от частных распределений» (Inference for Margin – IFM) сперва проводит параметризацию частных распределений, а потом копулы.

Непараметрические методы оценки также делятся на два вида. Один строится на оценке функции распределения эмпирической копулы ($C_n(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$), отражающей количество случаев, когда исходы случайных величин одновременно попали в выбранную ячейку сетки разбиения всего множества вероятностного пространства. Второй подход предполагает непараметрические (включая ядерные) оценки и для частных распределений.

Существует еще и полупараметрический метод, он оценивает копулу также в два этапа. Но на первом этапе вместо параметрической оценки частных распределений берутся эмпирические распределения, а на втором – происходит параметрическая оценка копулы.

Совместное распределение случайных величин финансового происхождения не всегда подчиняются многомерному нормальному распределению, существуют различия в форме зависимостей компонент анализируемого многомерного признака. Для определения отличия распределения от нормального используются такие характеристики как коэффициенты эксцесса и асимметрии. Как пример можно привести асимметрию в зависимостях доходностей рыночных активов, имеющую больший размер в периоды спада на рынке, нежели в периоды роста.

Из-за того, что многомерное распределение не всегда подходит для описания многомерного распределения величин финансово, встал вопрос в необходимости более адекватных многомерных моделей. И теоретическая модель копула-функций является одним из оптимальных способов его решения.

Глава 2. Исследование эмпирических распределений доходностей ценных бумаг для описания совместного распределения доходностей

Для получения временных данных о стоимости ценных бумаг этих компаний, а также для последующего их анализа, был использован язык программирования R и свободная среду разработки R Studio. Для более качественных расчетов был использован уже готовый скрипт на языке R – скрипт Ерика Зивота (Eric Zivot) профессора экономики и статистики Университета Вашингтона.

Было решено для исследования выбрать акции двух известных мировых IT компаний: Майкрософт и Apple, учитывая, что это ведущие компании в данной отрасли от поведения которых зависят другие компании отрасли, будет интересно посмотреть на взаимосвязь между стоимостью их акций. Сделав запрос напрямую из R Studio, мы смогли получить с сервиса yahoo finance данные о ценах на акции выбранных компаний за временной промежуток с начала 2006 года и до конца 2016 года.

Затем, на основе цен закрытия посчитали показатели логарифмической доходности каждой акций. Получив временные ряды показателей логарифмической доходности каждой акции, составим совместный временной ряд, а затем построим его график.

После построили график логарифма функции правдоподобия – рисунок 7, при предположении о том, что наше двумерное распределение (состоящее из распределений двух выбранных акций) имеет распределение

Стьюдента, и получили что функция правдоподобия достигает максимума при количестве степеней свободы равным около 3,4. Если бы число степеней свободы было бы порядка 30 и более, то это означало бы что наше распределение является нормальным, так как при данном значении степеней свободы ненормальность распределения исчезает.

Провели анализ эмпирических данных и получили показатели: матрица ковариации, корреляционная матрица, матожидание доходности, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Глава 3. Использование копула функций

Создаем произвольную двумерную копулу Гумбеля от двух частных распределений: нормального с параметрами матожидание mu = 3 среднеквадратичное отклонение sigma = 4 и распределение Стьюдента с числом степеней свободы df= 3.

Построим графики перспективы функции распределения и плотности функции распределения для распределения копулы Гумбеля. Построим диаграмму рассеяния, затем оценим параметры двумерного распределения методом максимального правдоподобия MLE и методом от частных распределений IFM. Они дадут нам близкие к теоретическим значения.

Построим диаграмму рассеивания, визуальный анализ диаграммы рассеивания позволяет утверждать, что квадрат заполнен неравномерно (есть сгущение точек вблизи диагонали), т.е. присутствует корреляция между переменными.

Теперь приступим к подгонке имеющихся эмпирических данных. Используя метод максимальной штрафной функции правдоподобия получим параметры подгонки временных рядов акций к скошенному t распределению. Вычислим значения функции вероятности для элементов временных рядов, используя полученные выше параметры и построим для них диаграмму рассеяния, на нем также видно, что присутствует корреляция между распределениями.

Нам нужно определить какая модель копула функции более точно подходит к двумерному распределению, полученному из эмпирических распределений. Произведем подгонку t копулы для совместного двумерного распределения этих частных распределений методом IFM: в результате выполнения подгонки функции параметр ранговой корреляции Спирмена равен 0,458, число степеней свободы 4, а максимальное значение функции правдоподобия 386

Вычислим критерий согласия для t копулы, с помощью функции gofCopula, основанной на сравнении копулы с параметрической оценкой копулы, сделанной в предположении выполнения нулевой гипотезы.

Если ввести в рассмотрение третью ценную бумагу, например акции компании Facebook – FB, и пересчитать соответствующие параметры, то для реальных эмпирических данных параметры трехмерной копулы будут равны:

```
> fit.tcop.ifm
Call: fitCopula(copula, data = data, method = "mpl", start = ..2)
Fit based on "maximum pseudo-likelihood" and 1153 3-dimensional observations.
Copula: tCopula
rho.1 rho.2 rho.3    df
0.382 0.335 0.321 7.572
The maximized loglikelihood is 194
Optimization converged
```

Глава 4. Расчет показателей риска портфеля для t копулы

Теперь наша задача сформировать портфель из трех ценных бумаг – акций AAPL, MSFT, и FB, значения доходностей которых будут сгенерированы на основе t копулы с параметрами, полученными в предыдущей части. После чего вычислим параметры портфеля, определим ожидаемую доходность, дисперсию, вычислим VaR и CVaR (также называемый ES - Expected Shortfall).Затем сгенерируем 500 портфелей с разным соотношением активов и вычислим для каждого портфеля ожидаемую доходность, VaR и ES.

Сначала приступим к созданию модельной выборки: 1000 реализаций значений доходностей акций AAPL, MSFT и FB, используя при генерации параметры копула-функции и маргинальных распределений, полученные на предыдущем этапе.

На первом шаге сгенерируем 1000 случайных реализаций значений трехмерной копула функции (t копулы с параметрами, полученными в конце предыдущей главы). Для этого сначала создаем трехмерную t копулу, далее создаем по ней многомерное распределение с частными распределениями и их параметрами. И затем генерируем значения доходностей активов портфеля в количестве 1000 и считаем значения доходностей всего портфеля в каждый из 1000 случаев. Получили значения доходностей и далее считаем ожидаемую доходность каждой акции (мат ожидание). Считаем ожидаемую доходность портфеля, дисперсию и стандартное отклонение. Вычислим коэффициенты корреляции, ковариации и вариацию для портфеля в целом.

Рассчитаем Value at Risk - стоимостная мера риска, это оценка величины потерь, которая не будет превышена с определенной заданной вероятностью. Вычислим VaR используя метод, основанный на использовании копул и доверительный уровень равный 95%. Теперь с теми же параметрами вычислим CVaR или ES (*Expected Shortfall ожидаемый минус*).

Затем перейдем к построению достижимого множества портфелей. Генерируем 500 портфелей с разными весами w1,w2 и w3, скомпонуем веса в один вектор w. Вычислим VaR ES и ожидаемую доходность, применяя метод основанный на использовании копул. Построим графики для границ множества портфелей, вычисленных по ES и VaR. Теперь вычислим VaR, ES и ожидаемую доходность, применяя дельта нормальный метод. Построим графики для границ множества портфелей, вычисленных по ES и VaR дельта нормальным методом.

Разместив обе диаграммы на одном графике видно, что оценки рисков (ES) портфелей, полученные дельта-нормальным методом, дают немного заниженные оценки, чем методом, основанном на применении копул, приблизительно в 0,95 раз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был проведен обзор как теоретической, так и эмпирической базы приложений моделей «копулы». Копулы имеют большое значение в современной эконометрике и финансовой науке, основное применение состоит в их использовании вместо широко используемого нормального распределения.

В данной работе было показано, что доходности ценных бумаг – акций трех выбранных крупных IT компаний, имеют распределения хорошо описываемые скошенными t распределениями. А их совместное распределение хорошо описывается t копулой, которую мы оценили.

На основе параметров, полученных в результате оценки t копулы была создана модельная выборка значений доходностей ценных бумаг, на их основе был составлен портфель ценных бумаг, который был затем оценен по многим показателям. Были вычислены value at risk и ES (expected shortfall).

Затем было построено достижимое множество портфелей: для чего было сформировано 500 портфелей из трех выбранных ранее ценных бумаг, доли которых были сгенерированы случайным образом. Были вычислены значения value at risk, ES и ожидаемые доходности портфелей, для этого были использованы два метода: метод основанный на использовании копул и дельта-нормальный метод. После чего были построены графики достижимых рисковых границ портфелей (графики риск – доходность). Визуальный анализ графиков показал, что оценки рисков, вычисленные дельта-нормальным методом, дают оценки заниженные относительно метода, основанным на применении копул, приблизительно в 0,95 раз.