

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра **математической экономики**

АВТОРЕФЕРАТ

на магистерскую работу

Стохастические модели динамики процентной ставки

студентки **3 курса** **391 группы**

направления **38.04.01—Экономика**

механико-математического факультета

Бредихиной Евгении Юрьевны

Научный руководитель

Профессор, д.э.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

В. А. Балаш

ФИО

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

С.И. Дудов

ФИО

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Динамические модели, то есть модели, описывающие стохастическую динамику цен акций, появились достаточно давно, однако использование этих моделей для описания динамики цен облигаций породило ряд трудностей, связанных с различной природой инструментов. В связи с этим начали появляться модели стохастической динамики процентных ставок. Эти модели предполагали, что краткосрочная (мгновенная) процентная ставка имеет стохастическую динамику. К сожалению, подобные модели обычно давали нереалистичные кривые доходностей, а также не были способны отразить произвольную текущую срочную структуру процентных ставок, наблюдаемую на рынке. Нестационарность и неустойчивость моделей второго поколения вела к необходимости постоянной калибровки, порой влекущей весьма значительные изменения параметров. Параллельно с этим прослеживалась тенденция к увеличению размерности используемых моделей: использовались две, три, N фазовых переменных. Значительно возросшие сложность и требовательность к вычислительным ресурсам не позволили в должной мере улучшить качество моделей, от которых теперь требовалось отражение срочной структуры не только процентных ставок, но и их волатильностей, а также возможность раздельного движения ставок на разных сроках.

Учитывая актуальность проблематики, темой магистерской работы была выбрана следующая: «Стохастические модели динамики процентной ставки».

Предметом исследования являются известные стохастические модели динамики процентной ставки и методы оценки их параметров.

В рамках достижения цели магистерской работы представляется логичным и целесообразным решить следующие основные задачи:

- уяснить сущность и содержание временной структуры процентной ставки,
- осуществить обзор различных моделей динамики процентной ставки,
- рассмотреть подходы к оценке параметров модели Васичека в теории и на практике.

Обзор стохастических моделей динамики процентной ставки

Срочная структура процентных ставок, более известная как бескупонная кривая доходности, рассматривается как наиболее информативный индикатор состояния финансового рынка, один из важнейших макроэкономических параметров и эталон для оценки ценных бумаг в других секторах рынка инструментов фиксированной доходности. В связи с этим особую важность имеет задача нахождения кривой доходности по рыночным данным.

До сих пор обычно используемые модели определяли либо всю кривую в один момент времени, работая с "моментальным снимком" рынка, либо временную стохастическую динамику одной - двух точек кривой. Тем не менее, показано, что ни одна из существующих параметрических моделей кривой доходности не может быть снабжена никакой стохастической динамикой при условии отсутствия арбитражных возможностей. В литературе был полностью описан класс параметрических "моделей моментального снимка", допускающих нетривиальную динамику своих параметров, причём этот класс оказался слишком бедным для использования на практике. С другой стороны, модели, задающие стохастическую динамику левого конца кривой доходности (мгновенной процентной ставки), обычно неявно подразумевают нереалистичные формы кривой доходности (например, с отрицательными или стремящимися к бесконечности процентными ставками). Для преодоления этих ограничений актуальным является использование непараметрических моделей, дающих достаточное количество степеней свободы как для удовлетворения условию отсутствия арбитражных возможностей, так и для обеспечения гибкого отражения сложных форм кривой доходности.

Анализ моделей стохастической динамики срочной структуры процентной ставки

Источником процентного риска является неопределенность, невозможность точного прогнозирования будущих процентных ставок. Однако, не зная, какими в точности будут процентные ставки через месяц или через год,

мы знаем, что колебания процентных ставок подвержены определенным закономерностям. Эти знания включают существующие особенности организации и функционирования рынка, а также данные о прошлом (историческом) его развитии. Как минимум, мы знаем, что различные рыночные процентные ставки (и, тем самым, цены существующих инструментов) более или менее тесно взаимосвязаны между собой. Наличие взаимосвязи между случайными величинами означает, что они находятся под воздействием общих факторов.

Выбор факторов является, как правило, первым и одним из наиболее важных шагов в построении модели временной структуры. Он может быть сделан достаточно произвольно, когда преследуется цель простоты и прозрачности модели, может основываться на эконометрическом анализе рыночных данных или на некоторой экономической модели равновесия.

Далее необходимо определить в соответствии с какими закономерностями изменяются выбранные факторы (другими словами какими случайными процессами описывается их динамика) и как они связаны с реальными рыночными ценами (процентными ставками). При ответе на последний вопрос, как правило, предполагают, что существующие рыночные цены не допускают возможности арбитража. Случайные процессы, описывающие динамику факторов, всегда зависят от определенного набора параметров, поэтому необходимо откалибровать модель найти такие значения параметров, которые наиболее точно соответствовали бы наблюдаемым рыночным ценам. На этапе статистического анализа модели важно убедиться, что модель является в достаточной степени адекватной, т.е. удовлетворительно описывает соотношения между реальными рыночными показателями и их динамику.

Наличие модели (в том числе статистических оценок ее параметров) позволяет решать ряд важнейших задач.

Во-первых, модель дает возможность оценивать финансовые инструменты, денежные потоки по которым зависят от выбранных случайных

факторов. Оценка в данном случае означает определение такого значения цены, которое исключает арбитраж. Имея информацию о ликвидных инструментах, на основании модели можно оценивать инструменты, которые менее ликвидны или вообще не обращаются на рынке.

Во-вторых, модель необходима для разработки стратегий хеджирования рисков, выбора портфелей финансовых инструментов, стоимость которых не подвержена (точнее в меньшей степени подвержена) влиянию непредвиденных колебаний случайных факторов. Если некоторая стратегия хеджирования разработана без явного применения модели это просто означает, что она неявно основана на некоторой (возможно, не вполне адекватной) модели.

В-третьих, модель может использоваться как инструмент контроля риска, например, для прогнозирования последствий рыночных колебаний для финансового института в целом или для отдельных позиций. Выбор той или иной модели в любом случае должен соответствовать решаемой задаче. Часто простая модель, не вполне удовлетворительная с точки зрения адекватности, может быть вполне пригодна для решения определенного класса практических задач.

Однофакторные модели

Простейшее предположение, которое может быть сделано относительно структуры процентных ставок во времени и цен инструментов с фиксированным доходом зависимость их от единственного случайного фактора. Формулы цен простых дисконтных облигаций определяются на основании предположений о вероятностных свойствах данного случайного фактора.

В качестве единственного фактора чаще всего выступает краткосрочная спот-ставка доходность инструментов со сроком погашения один период в случае дискретного времени, или мгновенная ставка для непрерывного времени. Вообще говоря, мгновенная ставка является скорее теоретической абстракцией, поскольку на реальном рынке трудно найти процентную ставку, которая вполне соответствовала бы этому понятию. Часто более подходящими

на роль мгновенной ставки являются более длинные ставки (недельные или месячные). Даже если считать, что случайным фактором является не краткосрочная ставка, а какой-либо другой параметр, модель всегда может быть преобразована таким образом, что единственным случайным фактором является именно краткосрочная ставка. Предположение о единственном случайном факторе, определяющем колебания всех цен на рынке, является чрезвычайно привлекательным вследствие своей простоты: в частности, оно дает возможность разработки относительно простых методов оценки финансовых инструментов.

Оценка параметров модели Васичека

Для практического использования модели структуры процентных ставок необходимо, используя рыночную информацию, оценить ее параметры. Оценивание параметров один из наиболее важных и сложных этапов в моделировании временной структуры. Существует множество возможных подходов к решению этой задачи. Различия состоят в том, какие данные и какие статистические методы используются для оценивания.

Первый возможный подход отдельные параметры, такие как скорость возвратной тенденции и долгосрочные равновесные значения процентных ставок в модели Васичека, оцениваются на основании исторических данных о динамике процентных ставок (временных рядов). Затем, недостающие параметры подбирается таким образом, чтобы модель наилучшим образом воспроизводила рыночные цены. Альтернативный подход – подгонка параметров модели только лишь под текущие рыночные цены, добиваясь наиболее точного воспроизведения их моделью. Основным недостатком использования временных рядов является то, что в действительности параметры меняются во времени, и полученные на основании статистических процедур оценки в лучшем случае отражают их прошлые значения, тогда как для адекватного решения практических задач необходимы сегодняшние и ожидаемые в будущем.

В качестве практического примера приведем оценку параметров модели Васичека, используя два массива данных - ежедневные данные по средневзвешенным ставкам по кредитам в рублях, предоставленным московскими банками российским банкам с высоким кредитным рейтингом за период с 14 января 2016 по 17 января 2017 г. и NASDAQ за период с 19 января 2016 по 17 января 2017 г. Полученные оценки параметров β , α и σ приведены ниже.

Таблица 1 - Оценки параметров по средневзвешенным ставкам по кредитам в рублях

Метод	B	A	Σ
МНК	10,4187	0,024980	0,395764
ОММ	10,4187	0,050799	0,395764
ММП	10,4187	0,024980	0,395764

Таблица 2 - Оценки параметров по котировкам Nasdaq

Метод	B	A	Σ
МНК	5020,75	19,3488	307,1528
ОММ	5020,75	42,3978	307,1528
ММП	5020,75	19,3488	307,1528

Двухфакторные модели

Модели, в которых присутствует только лишь один фактор риска, просты и удобны в использовании, как при оценивании параметров, так и для оценки финансовых инструментов и хеджирования. Во многих ситуациях их использование оправдано и дает удовлетворительные результаты в первую очередь когда основным источником риска, который необходимо хеджировать, является изменение общего уровня процентных ставок. Достаточность однофакторных моделей для практических целей может подтверждаться с помощью анализа главных компонент, если первая главная компонента

объясняет львиную долю (80% - 90%) колебаний процентных ставок. Тем не менее, простота однофакторных моделей является и их главным недостатком.

В первую очередь, ключевое предположение, лежащее в основе однофакторной модели об абсолютной коррелированности процентных ставок по всем срокам погашения, не подтверждается на практике. Наличием только лишь одного фактора может объясняться факт, что однофакторная модель неудовлетворительно воспроизводит фактические рыночные цены даже простых процентных инструментов (облигаций), не говоря уже об опционах. Все вышесказанное говорит в пользу того, что существенно более точные результаты в задачах оценки и хеджирования (что предельно важно с точки зрения применения моделей на практике) могут быть получены с использованием моделей, содержащих более чем один случайный фактор.

Оценка опционов с помощью модели Васичека

Модель Васичека изменения мгновенной ставки r стохастична и имеет вид:

$$dr = a(b - r) dt + \sigma_r dz \quad (3.1)$$

Таким образом, небольшое изменение (dr) в мгновенной ставке с увеличением времени dt включает в себя дрейф обратно к среднему уровню b со ставкой a для мгновенной ставки. Второе слагаемое волатильности включает неопределенность, dz , представляющую собой нормально распределенную переменную с нулевым средним значением и дисперсией dt .

При оценке опционов на акции основным подходом является получение дисконтированной ожидаемой стоимости в риск-нейтральном мире выплаты опциона. Эквивалентно, текущая стоимость акции может рассматриваться как дисконтированная стоимость в риск-нейтральном мире его будущей ожидаемой стоимости. В случае опциона на бескупонные облигации значение в момент времени $t = 1$, которое должно быть получено в момент времени s , может быть выражено как:

$$P(t, s) = E^Q \left[\exp\left(- \int r(u) du\right) 1 \right] \quad (3.2)$$

где интеграл находится за временным интервалом от нижнего предела t до верхнего предела s и обозначение E^Q обозначает риск-нейтральное ожидание.

На рисунке 1 показаны вычисления для получения значений параметров.

	A	B	AN	AO
1	Модель Васичека: оценка европейского опциона на бескупонную облигацию			
2	model	$dr = a(b-r) dt + \sigma r dz$		
3				
4	a	0,1569		
5	b	0,0954	P(0,T)	0,765149263
6	r	0,04	R(0,s)	0,065042461
7	0 (nowyr)	0	v(0,T)	0,031768496
8	s (zeroyr)	10	B(T,s)	3,464959728
9	zero life	10	σp	0,110076558
10	σr	0,02		
11			M	-0,388798689
12	T (optyr)	5	V	0,012116849
13	B(0,s)	5,046186542		
14	A(0,s)	0,63854	d2	1,10856423
15	P(0,s)	0,52182	d1	1,218640787
16				
17	Bond Face Value (L)	1	N(d1)	0,888509719
18	Option Exercise Price (X)	0,6	N(d2)	0,866190892

Рис.1 Оценка европейского опциона на бескупонную облигацию

Конечной целью моделей процентных ставок Васичека и CIR было предоставить аналитические решения, позволяющие оценивать варианты по бескупонным облигациям и тем самым улучшать адаптацию подхода Блэка-Шоулза, который по существу игнорировал временную структуру.

Моделирование мгновенной процентной ставки в модели Васичека

В ходе изучения модели Васичека была реализована программа, моделирующая процесс мгновенной процентной ставки по заданным формулам и рисующая график процентной ставки.

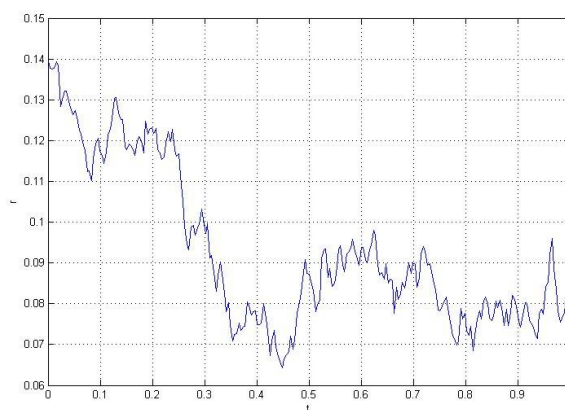


Рис 3. График мгновенной процентной ставки

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Случайные процессы, описывающие динамику факторов, всегда зависят от определенного набора параметров, поэтому необходимо откалибровать модель - найти такие значения параметров, которые наиболее точно соответствовали бы наблюдаемым рыночным ценам. На этапе статистического анализа модели важно убедиться, что модель является в достаточной степени адекватной, т.е. удовлетворительно описывает соотношения между реальными рыночными показателями и их динамику.

В ходе работы была обобщена теоретическая информация по заданной тематике: рассмотрена сущность и содержание временной структуры процентной ставки, проанализированы различные модели динамики процентной ставки и подходы к оценке параметров моделей.

В практической части дипломной работы были проведены расчеты по рассмотренным моделям и реализована программа для моделирования мгновенной процентной ставки в модели Васичека. Цель достигнута и задачи решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. D.-H. Ahn, B. Gao. A Parametric Nonlinear Model of Term Structure Dynamics // The Review of Financial Studies. Special 1999 Vol. 12, № 4.
2. F. Black, P. Karasinski. Bond and Options Pricing When Short Rates are Lognormal // Financial Analysts Journal. 1991. Vol. 47.
3. J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rate // Econometrica. 1985. Vol. 53. 1985.
4. D. Heath, R. Jarrow, A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation // Econometrica. 1992. Vol. 16, no. 1.
5. B. Goldys, M. Musiela, D. Sondermann. Lognormality of Rates and Term Structure Models // Stochastic Analysis and Applications. 2000. Vol. 18, No 3.
6. F. Jamshidian. Libor and swap market models and measures // Finance and Stochastics. 1997. Vol. 1, no. 4.
7. A. Jeffrey, D. Kristensen, O. Lintonetal. Nonparametric Estimation of a Multifactor Heath-Jarrow-Morton Model: an Integrated Approach // Journal of Financial Econometrics. 2004. Vol. 2, No 2.
8. M. Musiela, M. Rutkowski. Continuous-time term structure models: Forward measure approach // Finance and Stochastics. 1997. Vol. 1, no. 4.
9. M. Rutkowski, M. Musiela. Martingale methods in financial modeling. Springer New York, 1997.
10. M. Jackson, M. Staunton. Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA – John Wiley & Sons, LTD, 2001.
11. F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy. 1973. Vol. 81, no. 3.
12. Балабушкин А., Гамбаров Г., Шевчук И. Оценка срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. 2004.
13. Лапшин В.А. Об определении временной структуры процентных ставок // Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов". — М.: Изд. отд. ф-та ВМиК МГУ, 2006.

14. Халл Дж. К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2013.
15. Лапшин В.А. Непараметрическая модель динамики срочной структуры процентных ставок // Материалы XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов". — М.: Изд. отд. ф-та ВМиК МГУ, 2009.
16. Лапшин В.А. Непараметрическая модель стохастической динамики процентных ставок // Вестн. РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. 2009. № 4.
17. Лапшин В.А. О задачах, связанных с определением срочной структуры процентных ставок // Вестник молодых ученых «Ломоносов». — М.: Макс-пресс, 2007.
18. Медведев Г.А. Математические основы финансовой экономики [Электронный ресурс]: Учебное пособие: Часть 1 — Мн.: Научно-методический центр “Электронная книга БГУ”, 2003.
19. Медведев Г.А. О стохастических моделях динамики процентных ставок, Белорусский государственный университет
20. Светлов К.В. Стохастическая модель управления инвестиционным портфелем // Аудит и финансовый анализ. 2015.
21. Светлов К.В. Моделирование и оценивание временной структуры процентных ставок в рамках подхода Васичека // Аудит и финансовый анализ. 2015.
22. Басов А.И., Галанов В.А., Голда З.К. Рынок ценных бумаг. М.: Изд-во «Финансы и статистика», 2007.
23. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа. — М.: Анкил, 2006.