

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

АВТОРЕФЕРАТ

на выпускную квалификационную работу специалиста

**«Сравнительный анализ различных методов решения задачи
оптимального портфельного инвестирования»**

студентки 3 курса 391 группы

направления 080801 «Экономика»

код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Ухасовой Ирины Андреевны

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель:

доцент, д.ф.-м.н., доцент

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

С. П. Сидоров

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой:

профессор, д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

С.И. Дудов

инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмы окружают нас повсюду и имеют большое как теоретическое, так и практическое значение, помогая нам найти решение какой-либо конкретной задачи и добиться желаемого результата.

В естественных науках, в частности программировании, актуальными являются задачи оптимизации. В таких задачах может существовать множество различных решений; их «качество» определяется значением какого-то параметра, и требуется выбрать оптимальное решение, при котором значение параметра будет минимальным или максимальным (в зависимости от постановки задачи). Многие такие задачи сравнительно быстро и просто решаются с помощью жадных алгоритмов. Такой алгоритм делает на каждом шаге локально оптимальный выбор, допуская, что итоговое решение также окажется оптимальным. Однако это не всегда так, но для большого числа алгоритмических задач жадные алгоритмы действительно дают оптимальное решение.

Целью данной работы является изучение и применение алгоритмов для решения задачи оптимального портфельного инвестирования. А именно, будут рассмотрены жадный алгоритм для минимизации в l_2 норме и алгоритм типа LASSO. Приведен сравнительный анализ этих алгоритмов на основе их применения. Дополнительно будут исследованы несколько категорий спарс-представлений. Это разреженные представления, которые так же используются для решения актуальных задач, алгоритмы спарс-представлений делятся на несколько классов: выпуклая релаксация, комбинаторные методы и, в том числе, жадные алгоритмы.

В первой части «**Распределение по категориям методов спарс-представления**» рассмотрены несколько категорий спарс-представлений. Таких как, спарс-представление с минимизацией нормы l_0 , спарс-представление с минимизацией нормы l_1 , спарс-представление с минимизацией нормы l_p , где $(0 < p < 1)$, спарс-представление с минимизацией нормы $l_{2,1}$ и l_2 .

Теория разреженных представлений может быть классифицирована с разных точек зрения. Алгоритмы спарс-представления грубо делятся на три класса: выпуклая релаксация, жадные алгоритмы и комбинаторные методы. С точки зрения моделирования и решения задач алгоритмы делятся на: жадные алгоритмы и алгоритмы выпуклой релаксации.

В стратегии жадного приближения для решения разреженного представления основной задачей является решение спарс-представления с минимизацией нормы в l_0 . Из-за того, что эта задача является NP - трудной, жадная стратегия для устранения этой проблемы выдает приближенное решение. Для оптимального комплексного решения жадная стратегия ищет наилучшее частное оптимальное решение в каждой итерации. Для метода спарс-представления, стратегия жадного приближения выбирает k наиболее подходящих выборов, которые называются k - разреженностью, для аппроксимации вектора измерений.

Основная цель стратегии ограниченной оптимизации - изучение способа для преобразования недифференцируемых задач оптимизации в дифференцируемые. Для этого выпуклый, но не гладкий член с нормой в l_1 меняется на термин дифференцируемой оптимизации, который в свою очередь выпуклый и гладкий. Если говорить более конкретно, стратегия ограниченной оптимизации заменяет термин минимизации нормы в l_1 с одинаковым условием ограничения, на исходную неограниченную задачу. Если исходная неограниченная задача переформулирована в дифференцируемую задачу с ограниченными условиями, то она станет неограниченной задачей вследствие того, что минимизация нормы в l_1

недифференцируема.

Норма в l_1 берет свое начало из задачи Лассо и широко используется для решения задач, связанных с машинным обучением, распознаванием образов и статистикой. Хотя метод спарс-представления с минимизацией нормы в l_0 может получить фундаментальное разреженное решение α , задача по-прежнему является NP-трудной, а решение сложно аппроксимировать. Решение представления, полученное с помощью ограничения минимизации нормы в l_1 , также удовлетворяет условию разреженности, и решение, использующее минимизацию нормы в l_1 может быть эквивалентно решению, полученному с помощью минимизации нормы в l_0 . Более того, задача оптимизации нормы в l_1 имеет аналитическое решение и может быть решена за полиномиальное время. Таким образом, чтобы "обогащить" теорию разреженных представлений были предложены методы с минимизацией нормы в l_1 . Сфера применения разреженного представления с минимизацией нормы в l_1 широка.

Во второй части «**Портфельное инвестирование**» рассмотрены основные принципы портфельного инвестирования, виды портфельного инвестирования, а так же оценка рисков и методы их измерения.

Портфельное инвестирование — относительно новое явление в отечественной экономике, связанное со становлением и развитием финансового рынка, в частности рынка ценных бумаг. Это способствовало появлению возможности осуществления вложений в финансовые инструменты — различного рода долгосрочное инвестирование и краткосрочные финансовые обязательства.

Значительная доля вложений в финансовые инструменты принадлежит инвестициям в ценные бумаги. Как правило, инвестирование осуществляется не в одну, а сразу в несколько ценных бумаг. Такой набор называют «портфель», а инвестирование подобного рода принято именовать «портфельным». Вложение денежных средств в ценные бумаги называется

портфельным инвестированием. Такие инвестиции осуществляются с целью минимизации рисков и получения спекулятивной прибыли, а не для увеличения контроля над деятельностью какой-либо компании, что свойственно прямому инвестированию.

Осуществляя портфельное инвестирование, инвестор намерен получить доход от повышения цены на акции, а также дивиденды на эти акции. Инвестирование можно считать портфельным, если куплены акции и облигации нескольких компаний разной отраслевой направленности. Такое распределение активов необходимо для стабилизации убытков и увеличения капитала в одной отрасли в случае наступления неблагоприятных условий в другой отрасли.

Формирование инвестиционного портфеля предусматривает руководство следующими принципами:

- 1) безопасность вложений (инвестиции не зависят от колебаний на рынке инвестиционного капитала);
- 2) ликвидность (способность вложений быстро и без ценовых потерь превращаться в наличные средства, принимать участие в немедленном приобретении товаров, услуг);
- 3) стабильность получения прибыли.

Нет такой инвестиционной ценности, которая обладала бы всеми перечисленными свойствами, поэтому необходим компромисс. Надежность ценных бумаг определяет их низкую доходность, так как сторонники надежности собьют уровень прибыли, предлагая высокую цену. При формировании портфеля главной целью является достижение оптимального баланса между доходом и риском для инвестора. Важно подобрать такой набор инвестиционных инструментов, чтобы минимально снизить риск вложений, одновременно увеличив доход до максимума. Достичь успеха в портфельном инвестировании возможно лишь при условии грамотно подобранного пакета бумаг компаний и оптимального определения

пропорций между ценными бумагами с разными свойствами. Следует помнить о всесторонней взаимосвязи отраслей и влиянии экономического состояния на все акции. Портфель должен быть составлен каждым инвестором индивидуально, в зависимости от преследуемой цели.

Особенности и преимущества портфельного инвестирования:

- 1) совокупные возможности ценностных вложений придают портфелю инвестиционные качества, что невозможно достигнуть при вложении средств в акции и облигации одного эмитента;
- 2) умение правильно подбирать и управлять инвестиционным портфелем позволяет получить оптимальные пропорции доходности и риска для каждого инвестора индивидуально;
- 3) возможность формирования портфеля является достаточно доступным для значительного количества инвесторов, так как не требует высоких затрат, в отличие от инвестирования в реальные активы;

На практике портфельное инвестирование обеспечивает достаточно высокий процент доходности за относительно короткий интервал времени.

Руководить портфельным инвестированием можно самостоятельно, для чего потребуется приложить усилия и внимательность для постоянного контроля за набором портфеля и уровнем доходности. Для большей безопасности можно заниматься инвестированием с помощью специальных инвестиционных фондов, но в таком случае необходимо будет оплачивать комиссионные сборы. Совершенно справедливо считается, что портфельное инвестирование и возможность его осуществления свидетельствует о зрелости и состоятельности рынка.

При оценке инвестиционных рисков чаще всего используют рейтинги ценных бумаг, стран, валют, различные математические модели. Возможны два различных подхода к оцениванию: «сверху вниз» и «снизу вверх». При первом прежде выбирается перспективный инвестиционный регион или отрасль на основе макроэкономической ситуации, а затем уже

осуществляется покупка конкретных активов. При подходе «снизу вверх» сначала выявляют конкретные инвестиционные возможности в отдельных регионах, отраслях.

Общий риск портфеля делят на систематический и несистематический. Систематический риск не связан с какой-то конкретной ценной бумагой, а обусловлен общими рыночными причинами, такими как макроэкономическая ситуация в стране, интенсивность деловой активности на финансовых и фондовых рынках. Считается, что систематический риск не может быть снижен с помощью диверсификации инвестиций, поэтому он является недиверсифицируемым.

Систематический риск включает следующие виды рисков:

- 1) Политический – риск финансовых потерь, связанных с политической нестабильностью и социальной напряженностью в стране;
- 2) Правовой – риск изменения законодательства в сфере финансового регулирования;
- 3) Инфляционный – обесценивание государственной валюты снижает инвестиционную привлекательность страны;
- 4) Валютный – риск, сопряженный с покупкой валютных ценных бумаг, обусловленный изменениями курса иностранной валюты;
- 5) Процентный – риск финансовых потерь в связи с изменением процентных ставок на рынке.

Несистематический риск связан с конкретной ценной бумагой и может быть снижен путем диверсификации, вследствие чего является диверсифицируемым. Он включает следующие виды рисков:

- 1) Селективный – риск неправильного выбора ценной бумаги для инвестирования из-за ошибочной оценки ее инвестиционных качеств;
- 2) Временной – риск несвоевременной покупки или продажи актива;

3) Кредитный – присущ долговым ценным бумагам и обусловлен вероятностью того, что эмитент окажется неспособным исполнить свои обязательства по выплате процентов и номинала долга;

4) Риск ликвидности – может возникнуть из-за затруднений с реализацией актива по приемлемой цене;

5) Корпоративный – зависит от состояния компании-эмитента ценных бумаг, входящих в портфель.

На данный момент все методы измерения риска можно разделить на два подхода: первый основан на измерении риска через дисперсию или стандартное отклонение доходности, а второй — на оценке вероятности получения участником рынка недопустимо малых для него доходов.

Классическая модель Марковица базировалась на анализе среднего значения и дисперсии доходности, но этот подход не может объяснить некоторые феномены на рынке. Вариация же, как мера риска, учитывает и положительные, и отрицательные отклонения доходности, хотя инвесторы интересуются только отрицательными (убытками). Поиск оптимального портфеля заключается в построении множества эффективных портфелей, хотя это и не дает возможности точно определить оптимальный портфель, так как его выбор зависит от склонности того или иного инвестора к риску. Используя функцию полезности, можно построить кривую безразличия и найти точку ее касания с границами эффективных портфелей. Такой портфель будет оптимальным только для конкретного инвестора, а значит, очень важно объективно определить склонность конкретного инвестора к риску. Шарп и Линтнер опровергали правильность модели Марковица, так как, по их мнению, бессмысленно рассматривать среднюю доходность для моделей с реальными активами в связи с тем, что доходность и риск этих активов спрогнозировать невозможно. Они предложили вместо измерения корреляции сравнить две сильно связанные тенденции: поведение актива и поведение рынка. Еще одно возражение против средней доходности заключалось в неприятии концепции симметричного риска. Проигрыш на

торгах влияет на инвестора гораздо сильнее, чем выигрыш, а значит, мера риска должна быть несимметричной. Если риск связывать только с потерями, то можно рассматривать целый спектр моделей оценки портфельного риска, к которым относятся Mean–Absolute Deviation (MAD), Value-at-Risk (VaR), Capital-at-Risk (CaR), Earnings-at-Risk (EaR) и другие.

В третьей части **«Постановка задачи портфельного инвестирования»** непосредственно представлена задача портфельного инвестирования и рассмотрены l_1 -Регуляризация и l_2 -Регуляризация.

Для любого $q > 0$ и $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, пусть $\|x\|_q := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q}$ и $\|x\|_0 = \lim_{q \rightarrow 0^+} \|x\|_q$ = (количество ненулевых элементов x). Если $q \geq 1$, то $\|x\|_q$ есть L_q -норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть n есть общее количество инвестиционных активов. Обозначим r_{it} доходность актива i в момент времени t , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq t \leq m$. Портфель определяется вектором весов, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Пусть μ есть доходность, заданная инвестором.

Для простоты в рассматриваемой нами модели не будут учитываться транзакционные издержки. Будем считать, что

- короткие продажи допустимы, т. е. веса могут быть отрицательными;
- инвестор располагает одной единицей капитала, т. е. $x^T 1_n = 1$, где 1_n обозначает вектор из \mathbb{R}^n в котором каждая компонента равна 1.

В задаче портфельного инвестирования (модель Марковица) цель инвестора состоит в том, чтобы найти портфель с минимальным риском среди имеющих заданную доходность, сумма квадратов отклонений доходности портфеля и единичного вектора умноженного на доходность μ возвращает (1):

$$x^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{m} \|1_n \mu - Rx\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1. \quad (1)$$

Так как задача (1) это задача выпуклой оптимизации, она может быть решена аналитически с помощью метода Лагранжа. В данной статье мы рассмотрим алгоритм для решения задачи (1) с ограничением на кардинальность, т.е. с ограничением на число активов, входящих в портфель. Задача имеет следующий вид (2):

$$x^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{m} \|1_n \mu - Rx\|_2^2, \quad x^T 1_n = 1, \|x\|_0 \leq K, \quad (2)$$

где K - ограничение на число активов в портфеле с ненулевыми весами. Предполагается, что K это существенно меньше n , $K \leq n$.

Для получения значимых результатов, устойчивых для такого рода некорректных задач используют, как правило, процедуру регуляризации. Один из стандартных подходов состоит в том, чтобы добавить в целевую функцию штрафное слагаемое, которое может принимать различные формы, и в идеале должно иметь содержательную интерпретацию в терминах данной задачи.

В четвертой части **«Алгоритмы для решения задачи репликации индекса с ограничением на кардинальность»** рассмотрен жадный алгоритм, алгоритм типа LASSO, а так же Алгоритм дифференциальной эволюции для минимизации в l_2 .

Жадный алгоритм (англ. Greedy algorithm) — алгоритм, заключающийся в принятии локально оптимальных решений на каждом этапе, допуская, что конечное решение также окажется оптимальным. Известно, что если структура задачи задается матроидом, тогда применение жадного алгоритма выдаст глобальный оптимум.

Матроид — классификация подмножеств некоторого множества, представляющая собой обобщение идеи независимости элементов, аналогично независимости элементов линейного пространства, на произвольное множество.

Регрессия LASSO (least absolute shrinkage and selection operator) была описана в 1996 г. Метод заключается во введении ограничения на норму вектора коэффициентов модели, что приводит к обращению в 0 некоторых

коэффициентов модели. Метод приводит к повышению устойчивости модели в случае большого числа обусловленности матрицы признаков X , позволяет получить интерпретируемые модели – отбираются признаки, оказывающие наибольшее влияние на вектор ответов.

Недавнее дополнение к классу эволюционных эвристик является метод дифференциальной эволюции (ДЭ), предложенный R. Storn и K. Price. В ходе ДЭ на каждой итерации создается популяция из особей (точек пространства поиска), которые получены из особей предыдущей популяции путем модификации в соответствии с эволюционными принципами, при этом с ростом числа популяций особи сходятся в некоторую точку пространства решений, которая является глобальным оптимумом.

В пятой части «**Эмпирические результаты**» приведены результаты сравнения жадного алгоритма и алгоритма типа LASSO.

В эмпирическом анализе использовались открытые данные, относящиеся к трем основным рыночным индексам, которые расположены в хранилище OR-Library. Эти три рыночных индекса включают Hang Seng (Гонконг, $n = 31$), S&P 100 (США, $n = 98$) и Nikkei 225 (Япония, $n = 225$) для $m = 290$ временных периодов каждый (недельные доходности), взятые из хранилища. Описательные статистики доходностей индексов, представлены в таблице 1, они показывают, что временные ряды доходностей демонстрируют типичные паттерны финансовых временных рядов: средние значения находятся около нуля, легкую асимметрию и «толстые хвосты».

Таблица 2 показывает, что алгоритм типа LASSO дает портфели с лучшим поведением в терминах доходности для всех внутривыборочных множеств, и для 2 из 6 вневыборочных случаях. С другой стороны, жадный алгоритм приводит к портфелям с лучшими характеристиками в терминах волатильности ошибки слежения на внутривыборочных множествах, так и вневыборочных множествах данных. Жадный алгоритм даёт более высокие

значения в отношении корреляции с индексом, особенно сильное различие наблюдается для показателя $\delta = 0.9$ (когда в портфеле присутствует относительно небольшое число активов), как для внутривыборочных так и для вневыборочных данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен анализ и оптимизация применения жадного алгоритма и алгоритма типа LASSO для решения задачи оптимального портфельного инвестирования.

Цель работы достигнута, Эмпирические результаты показали, что подход на основе регрессии типа LASSO генерирует портфели с лучшим поведением в терминах доходности, в то время как жадный алгоритм дает портфели с лучшим поведением в отношении дисперсии ошибки слежения.

Задачи работы выполнены: проведен сравнительный анализ нескольких алгоритмов, в таблицах отражены результаты сравнения этих алгоритмов, полученные с помощью реализации в пакете MatLab.

Цель работы достигнута, изучены и применены алгоритмы для решения задачи оптимального портфельного инвестирования. А именно, жадный алгоритм для минимизации в l_2 норме и алгоритм типа LASSO.

Список использованных источников включает 25 позиций.

Некоторые источники:

1. Лобанов А. А., Чугунов А. В. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. М.: Альпина Паблишер – 2003 г.
2. Куликов А. Г. Деньги, кредит, банки: учебник. М.: КНОРУС – 2009 г.
3. Дудов С.И., Оптимальное портфельное инвестирование: учебное пособие для студентов экономико-математических специальностей. Саратов: Издательство Саратовского университета – 2008 г.
4. Jahn J. Some characterizations of the optimal solutions of a vector optimization problem // OR Spektrum – 1985 г.
5. Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets // Review of Economics and Statistics – 1965 г.
6. Beasley J. E. OR-Library <http://people.brunel.ac.uk/>
7. Beasley J. E., Meade N., Chang T.-J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem// European Journal of Operational Research. – 2003 г.