

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Геометрические преобразования в пропедевтическом курсе математики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль –
математическое образование)» механико-математического факультета

Засовиной Анны Владимировны

Научный руководитель
старший
преподаватель

С.В. Лебедева

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент

И.К. Кондаурова

Саратов 2018

Введение. Метод геометрических преобразований, является одной из фундаментальных идей, последовательно применяемых в систематическом курсе геометрии, что обусловлено следующими положениями:

- практические операции играют важную роль в мышлении (согласно Ж. Пиаже, все мыслительные операции образуют структуру группы, подобную группе преобразований в геометрии);

- с понятием преобразования связан «групповой подход» к геометрии, в соответствии с которым геометрия изучает свойства фигур, являющиеся инвариантами фундаментальной группы преобразований;

- геометрические преобразования являются не чем иным, как обобщением понятия о функции, их изучение открывает возможность «обозреть с одной точки зрения, как отдельные части геометрии, так и их взаимные связи» (Ф. Клейн), подчинить единой идее – идее функциональной зависимости – всю школьную математику;

- большая общность геометрических преобразований позволяет значительно упростить доказательство многих теорем;

- изучение геометрических преобразований способствует формированию пространственного мышления, использование их вооружает учащихся способами (методами) решения задач на построение, которые, в свою очередь, являются одним из эффективных средств развития геометрического мышления школьников;

- геометрические преобразования отражают общие закономерности диалектических взаимосвязей явлений природы, изучение их позволяет наиболее полно раскрыть практическую значимость, показать область применения геометрических знаний;

- геометрические преобразования используются не только в курсе геометрии, но и в школьных курсах алгебры (построение графиков функций), физики (механика, оптика), химии (кристаллические тела), черчения (построение изображений в различных проекциях) и др.

В виду значимости линии геометрических преобразований знакомство с основными понятиями и идеями геометрических преобразований начинается в курсе математики начальной школы и продолжается в 5-6 классах.

Вопросами геометрических преобразований в пропедевтическом курсе математики, так или иначе, занимались все авторы учебников, задачников и методических пособий по математике для 5-6 классов: М. И. Башмаков, Е. А. Бунимович, Н. Я. Виленкин, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев, И. И. Зубарева, В. В. Козлов, А. Г. Мерзляк, А. Г. Мордкович, Г. К. Муравин, С. М. Никольский, Л. Г. Петерсон и др.

Цель бакалаврской работы – выявить основные проблемы изучения содержания линии геометрических преобразований в пропедевтическом курсе математики и предложить пути их решения.

Для реализации цели были поставлены и решены следующие задачи:

- 1) Определить роль и место содержательно-методической линии геометрических преобразований в пропедевтическом курсе математики.
- 2) Выявить основные дидактические единицы линии геометрических преобразований в современных школьных учебниках математики 5-6 классов.
- 3) Разработать методические рекомендации к изучению геометрических преобразований в 5-6 классах.

Для решения поставленных задач применяются следующие методы исследования: анализ педагогической, методической, школьной учебной литературы, теоретический анализ, анализ и обобщение педагогического опыта, проектирование средств обучения.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы, название которых определяет ту или иную проблему («Геометрические преобразования в пропедевтическом курсе», «Методические рекомендации к изучению геометрических преобразований в курсе математики 5-6 классов»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. В первой главе – «Геометрические преобразования в пропедевтическом курсе» – выявляется роль (подготовить учащихся к сознательному усвоению систематического курса геометрии и к изучению смежных дисциплин), определяется место содержательно-методической линии геометрических преобразований в структуре и содержании учебников пропедевтического курса математики 5-6 классов, описываются этапы изучения геометрических преобразований на пропедевтическом уровне (формирование основных понятий темы, определение основных понятий темы и выявление их свойств, освоение алгоритмов построения и выявления симметричных фигур, применение к решению математических и практических задач), делается вывод о применении методов (и технологии) наглядной геометрии к изучению геометрических преобразований.

Геометрический материал в 5-6 классах распределён по всему курсу математики. Он составляет содержание так называемого пропедевтического курса геометрии. По количеству часов, отведенных на него, и по объему сведений, получаемых учащимися, курс небольшой, но строго последовательный и содержательный. Основная роль и соответственно цель этого курса – подготовить учащихся к сознательному усвоению систематического курса геометрии, а также к изучению таких смежных дисциплин как география, физика и др.

Благодаря этому, решается ряд задач:

1. Развитие логического мышления учащихся; привитие элементарных навыков определения простейших геометрических понятий, навыков четкой формулировки выводов на основе наблюдений.
2. Развитие пространственных представлений у учащихся.
3. Ознакомление учащихся с простейшими дедуктивными обоснованиями (без введения понятий «определение», «теорема», «доказательство»).

4. Формирование умений и навыков в выполнении построений с помощью основных геометрических инструментов – циркуля, линейки, угольника, транспортира; формирование рациональных приемов построения.

5. Формирование умений и навыков измерения геометрических величин.

Изучение содержания модуля геометрических преобразований пропедевтического курса геометрии проходит в несколько этапов:

1) *формирование основных понятий темы* идёт в ходе практической манипулятивной деятельности (перегибание листа, наложение кальки, перемещение картонных моделей по листу бумаги и т.п.),

2) *определение основных понятий темы и выявление их свойств* – логическая деятельность учащихся,

3) *освоение алгоритмов построения и выявления симметричных фигур* – практическая геометрическая деятельности,

4) *применение к решению математических и практических задач.*

Эти этапы, позволяют сделать вывод о применении методов (и технологии) наглядной геометрии к изучению содержания модуля геометрических преобразований пропедевтического курса геометрии.

Сравнительный анализ учебников математики для 5-6 классов, рекомендованных МО к использованию в учебном процессе в 2017-18 уч.году проведен по следующим критериям:

1) Основные понятия и их свойства.

2) Математические процедуры.

3) Типы учебных задач.

Все анализируемые УМК позволяют в полной мере реализовать задачи развития логического мышления учащихся; привития элементарных навыков определения простейших геометрических понятий, навыков четкой формулировки выводов на основе наблюдений; развития пространственных представлений; ознакомления учащихся с простейшими дедуктивными обоснованиями и формирования умений и навыков в выполнении построений с помощью основных геометрических инструментов и рациональных приемов

построения. Поэтому выбор УМК зависит от предпочтений учителя и степени подготовленности учащихся к усвоению содержания того или иного учебника.

Во второй главе даны методические рекомендации к изучению геометрических преобразований в курсе математики 5-6 классов, основанные на применении методов (и технологии) наглядной геометрии.

Наглядная геометрия, в отличие от систематического курса геометрии, изучает свойства геометрических форм путем «живого созерцания», то есть непосредственных восприятий и представлений конкретных примеров и их изображений. И хорошая постановка преподавания наглядной геометрии в младших классах является одним из условий для лучшего усвоения систематического курса геометрии при дальнейшем обучении. Наглядная геометрия призвана заполнить вакуум в геометрическом образовании до 7 класса. Цель этой пропедевтической дисциплины – продемонстрировать учащимся всё неисчерпаемое многообразие форм окружающего мира, но на интуитивно-ознакомительном уровне, без развития «серьёзной теории». УМК «Математика. Наглядная геометрия. 5-6 классы» основан на авторской наглядно-эмпирической концепции построения школьного курса геометрии.

Сопоставляя цели наглядной геометрии, которые авторы УМК стремятся реализовать с теми основными целями, которые решаются при изучении

Таблица 1 – Сопоставление целевых моделей	
Модуль «Геометрические преобразования» в пропедевтическом курсе математики	УМК «Математика. Наглядная геометрия. 5-6 классы» [20, с.]
Ознакомление учащихся с простейшими дедуктивными обоснованиями (без введения понятий «определение», «теорема», «доказательство»).	Систематизация имеющихся геометрических представлений и формирование основ геометрических знаний, необходимых в дальнейшем при изучении систематического курса в 7-9 классах;
Формирование умений и навыков в выполнении построений с помощью основных геометрических инструментов – циркуля, линейки, угольника, транспортира; формирование рациональных приемов построения.	Формирование изобразительно-графических умений и приемов конструктивной деятельности;
Развитие логического мышления учащихся; привитие элементарных навыков определения простейших геометрических понятий, навыков четкой формулировки выводов на основе наблюдений.	Развитие образного и логического мышления;
Развитие пространственных представлений у учащихся.	Формирование пространственных представлений, познавательного интереса, интеллектуальных и творческих способностей учащихся.

модуля «Геометрические преобразования» в пропедевтическом курсе математики (таблица 1), можно сделать вывод об их тождественности.

Содержание деятельности УМК «Наглядная геометрия» обладает рядом характеристических особенностей:

1. Систематизация и обобщение имеющихся у учащихся геометрических представлений, приобретение новых знаний осуществляется в ходе самостоятельной исследовательской деятельности учащихся, и потому основой наглядной геометрии является система познавательных задач и практических заданий, направленная на овладение учащимися геометрических методов, приобретение ими опыта геометрической деятельности.

2. Предлагаемые практические задания и задачи разнообразны и интересны, во многих случаях для их решения требуются не только и не столько геометрические знания, сколько умение наблюдать и делать выводы.

3. В учебнике реализовано требование создания ситуации успеха: практически любая задача под силу каждому ученику, если считать решение задачи многоуровневым в соответствии с ведущим на данный момент способом мышления ученика.

4. В учебнике реализован принцип фузионизма, то есть одновременно изучаются элементы планиметрии и стереометрии: плоскость и пространство, плоские фигуры и объемные тела соседствуют на страницах учебника и органически переплетаются, создавая единую геометрическую картину.

5. В объяснительный материал учебника включены исторические сведения, фрагменты литературных произведений, иллюстрации живописи.

6. Материал излагается на основе системы упражнений, с которыми школьники сталкиваются как в учебной деятельности, так и в повседневной жизни: определение форм реальных предметов, использование отражения от лужи при изучении зеркального отражения и др.

Изложения тем в учебнике предопределяет процессуальную модель урока: при последовательном выполнении заданий не требуется разработки новых структур урока. Именно поэтому пять первых разделов второй главы представлены методическими рекомендациями по изучению элементов

геометрических преобразований в курсе наглядной геометрии 6 класса в форме поурочных разработок по темам «Зеркальные отражения», «Симметрия», «Бордюры», «Орнаменты», «Симметрия помогает решать задачи».

Приведём пример рекомендаций (фрагмент)

Тема «Симметрия помогает решать задачи» состоит из одного урока, но это урок «настоящей» геометрии с теоремами, доказательствами и серьёзными задачами, и это стоит особо подчеркнуть.

На этом уроке учитель демонстрирует специфические особенности математической деятельности: анализ условия задачи, построение геометрической модели (рисунка), процесс поиска идеи и составление плана решения, реализация плана и дальнейшее использование результата.

Начинается урок с изучения основных свойств симметрии:

Свойство 1. Для любой точки плоскости всегда можно построить симметричную ей точку относительно некоторой прямой (рисунок 1а).

Свойство 2. Отрезок, соединяющий симметричные точки, перпендикулярен оси симметрии и делится ею пополам (рисунок 1б).

Свойство 3. Если отрезки M_1N_1 и MN симметричны относительно прямой l , то их длины равны (рисунок 1в).

Свойство 4. Если точка A_1 симметрична точке A относительно прямой l , то для любой точки B на этой прямой отрезки A_1B и AB равны (рисунок 1г).

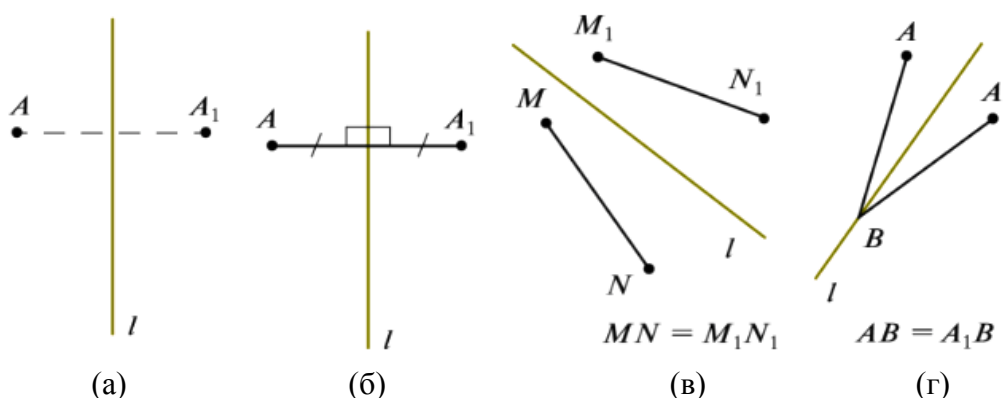


Рисунок 1 – Иллюстрация основных свойств симметрии

Основные свойства симметрии можно сформулировать как результат лабораторно-практической работы по плану учителя. Формулировки свойств

заучивать не нужно, ведь на данном этапе овладения геометрией главная задача состоит в формировании опыта геометрической деятельности учеников, включающего и элементы логических рассуждений.

Из рассмотренных свойств симметрии следует важное свойство плоскости, которое формулируется двояко (свойство 5):

– Если A – некоторая точка плоскости, а B – точка на прямой l , то длина отрезка AB будет наименьшей, если отрезок AB перпендикулярен l .

– Кратчайшим путём от точки до прямой является путь по перпендикулярному к этой прямой направлению.

Докажем это. Сначала построим чертёж: возьмём точку B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен l (рисунок 2). Пусть B_0 – любая другая точка

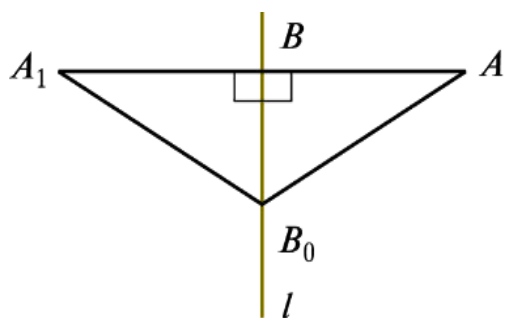


Рисунок 2 – Чертёж к доказательству свойства плоскости

на прямой l . Нам надо доказать, что AB меньше AB_0 .

Возьмём точку A_1 , симметричную точке A относительно l . Тогда точка B будет лежать на отрезке AA_1 , $AB = BA_1$ (по свойству 2). $AB + BA_1 = AA_1 = 2AB$.

$$AB_0 = B_0A_1 \text{ (по свойству 4).}$$

$$AB_0 + B_0A_1 = 2AB_0.$$

Отрезок AA_1 короче ломаной AB_0A_1 : $AA_1 < AB_0 + B_0A_1$.

$2AB < 2AB_0$. Значит, и AB меньше, чем AB_0 , что и требовалось доказать.

Далее вводится понятие касательной к окружности и формулируется ещё одно свойство: прямая, перпендикулярная радиусу окружности и проходящая через конец этого радиуса, касается окружности (свойство 6).

При изучении геометрических преобразований в 5-6 классах целесообразно использовать работу с интерактивными упражнениями (рисунок 3), созданными в LearningApps.org (приложение Web 2.0 для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей).

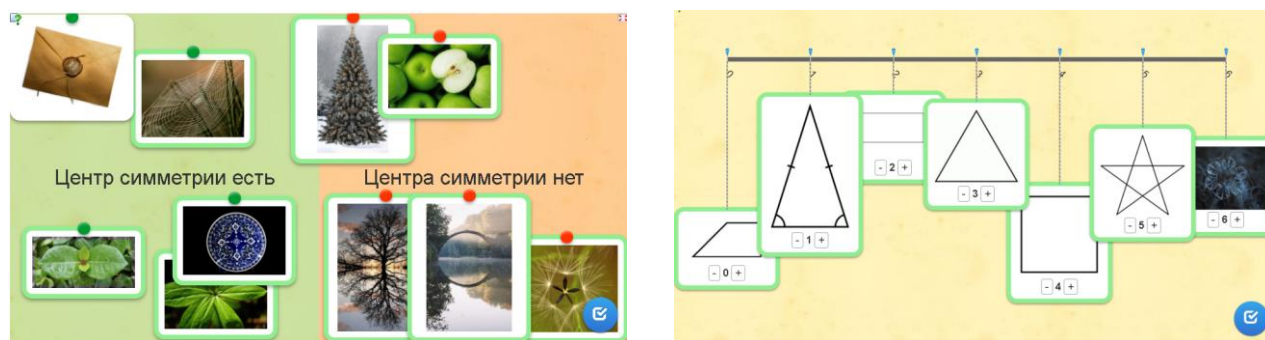


Рисунок 3 – Интерактивные упражнения по теме «Симметрия»

Целью интерактивных упражнений по теме «Симметрия», является экономия время при проверке степени сформированности у учеников основных понятий по теме, закрепление пройденного материала, а также смена видов деятельности (реализующая здоровьесберегающую технологию).

Заключение. В процессе работы над бакалаврским исследованием были сформулированы следующие выводы:

1. Метод геометрических преобразований, является одной из фундаментальных идей, последовательно применяемых в систематическом курсе геометрии.

2. В виду значимости линии геометрических преобразований знакомство с основными понятиями и идеями геометрических преобразований начинается в курсе математики начальной школы и продолжается в 5-6 классах.

3. За исключением УМК «Математика. 5-6 классы» М. И. Башмакова и А. Г. Мерзляка изучение геометрических преобразований отнесено к курсу математики 6 класса. Инвариантную часть составляет материал, посвящённый центральной и осевой симметриям. Вариативная часть представлена достаточно широко – от рассмотрения других видов геометрических преобразований на плоскости (поворот, параллельный перенос, подобие) и их комбинаций до формирования представлений о преобразованиях пространства, сохраняющих расстояние (зеркальная симметрия) и собственно понятии «геометрическое преобразование». Во всех УМК рассмотрены прикладные (симметрия координатной прямой и координатной плоскости) и практические (симметрия в природе, архитектуре, живописи и т.п.) аспекты геометрических

преобразований. Представление о равенстве геометрических фигур на плоскости даётся на основании процедуры наложения – непосредственного следствия теории геометрических преобразований плоскости. Геометрическое преобразование подобия рассматривается только в УМК «Математика. 5-6 классы» авторского коллектива под руководством Г.К. Муравина в связи с изучением пропорциональности.

4. Изучение содержания модуля геометрических преобразований пропедевтического курса геометрии проходит в несколько этапов: (1) *формирование основных понятий темы* идёт в ходе практической манипулятивной деятельности (перегибание листа, наложение кальки, перемещение картонных моделей по листу бумаги и т.п.); (2) *определение основных понятий темы и выявление их свойств* – логическая деятельность учащихся; (3) *освоение алгоритмов построения и выявления симметричных фигур* – практическая геометрическая деятельности; (4) *применение к решению математических и практических задач*. Эти, выявленные нами этапы, позволяют сделать вывод о применении методов (и технологии) наглядной геометрии к изучению содержания модуля геометрических преобразований пропедевтического курса геометрии.

5. Все анализируемые по следующим критериям: основные понятия и их свойства, математические процедуры, типы учебных задач – учебники математики для 5-6 классов, рекомендованные МО к использованию в учебном процессе в 2017-18 уч.году, позволяют в полной мере реализовать задачи развития логического мышления учащихся; привития элементарных навыков определения простейших геометрических понятий, навыков четкой формулировки выводов на основе наблюдений; развития пространственных представлений; ознакомления учащихся с простейшими дедуктивными обоснованиями и формирования умений и навыков в выполнении построений с помощью основных геометрических инструментов и рациональных приемов построения.

6. Сопоставляя цели наглядной геометрии, которые ставят авторы соответствующего УМК, с теми основными целями, которые решаются при изучении модуля «Геометрические преобразования» в пропедевтическом курсе математики, выяснили, что содержание деятельности, задаваемое предметным содержанием этого УМК обладает рядом характеристических особенностей: (1) Систематизация и обобщение имеющихся у учащихся геометрических представлений, приобретение новых знаний и потому основой наглядной геометрии является система познавательных задач и практических заданий. (2) Предлагаемые практические задания и задачи разнообразны и интересны, во многих случаях для их решения требуются умение наблюдать, конструировать и делать выводы. (3) В учебнике реализовано требование создания ситуации успеха: практически любая задача под силу каждому ученику. (4) В учебнике реализован принцип фузионизма, то есть одновременно изучаются элементы планиметрии и стереометрии: плоскость и пространство, плоские фигуры и объемные тела соседствуют на страницах учебника и органически переплетаются, создавая единую геометрическую картину. (5) В объяснительный материал учебника включены исторические сведения, фрагменты литературных произведений, иллюстрации живописи. (6) Материал излагается на основе системы упражнений, с которыми школьники сталкиваются как в учебной деятельности, так и в повседневной жизни.

7. Разработанные в LearningApps.org по теме «Симметрия» упражнения представляются наиболее адекватными средствами решения целого ряда образовательных задач, в том числе, экономии времени при проверке степени сформированности у учеников основных понятий по теме, а также закрепление пройденного материала.