Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Методика изучения обратных тригонометрических функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

направления 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета

Мачугиной Юлии Сергеевны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ____________________________ Т.А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ____________________________ И.К.Кондаурова

Саратов 2018

Введение. В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования (ФГОС С(П)ОО) перечислены требования к предметным результатам освоения базового курса математики, в том числе «владение стандартными приёмами решения тригонометрических уравнений и неравенств, их систем».

При изучении школьного курса математике (на базовом уровне) ученик должен: «Оперировать понятиями: функция, область определения и множество значений функции, график функции, тригонометрические функции; распознавать графики элементарных тригонометрических функций; соотносить графики элементарных тригонометрических функций; находить по графику приближённо значения функции в заданных точках»; (на углубленном уровне): «Владеть понятиями: функция, область определения и множество значений функции, график функции, тригонометрические функции, строить их графики и уметь применять свойства тригонометрических функций при решении задач; обратная функция, применять это понятие при решении задач».

Важную роль в обучении математике играют задачи исследовательского характера. Именно такими являются многие упражнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Теория аркфункций является своеобразным «зеркальным» отражением теории тригонометрических функций. Она содержит много интересных и разнообразных задач, помогает в развитии гибкости математического мышления.

Перед учителями школ стоит задача – подготовить учеников к успешному прохождению Единого государственного экзамена (ЕГЭ). А это задача совсем не простая, учитывая уровень сложности заданий и количество часов, отводимых по программе на изучение темы «Обратные тригонометрические функции». Значение данной темы достаточно велико – она составляет необходимую основу для решения тригонометрических уравнений и неравенств, изучаемых позднее.

Разработкой методики изучения обратных тригонометрических функций занимались многие математики и методисты (В. С. Крамор, А. Г. Мордкович, М. С. Мацкин, Р. Ю. Мацкина, И. Ф. Шарыгин, С. В. Королев, В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин и др.). Многочисленные статьи по данной теме регулярно публикуются в журналах «Математика в школе», «Математика для школьников» и др.

Однако задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями, часто вызывают у школьников старших классов значительные трудности. Связано это, прежде всего, с тем, что в действующих учебниках подобным задачам уделяется не слишком большое внимание, и, если с задачами на вычисление значений обратных тригонометрических функций учащиеся еще как-то справляются, то решение уравнений и неравенств, содержащих такие функции, часто вызывают затруднения.

Все вышеперечисленное обуславливает актуальность темы исследования.

Цель бакалаврской работы: обобщить и систематизировать материал по теме «Обратные тригонометрические функции» и разработать методическое обеспечение для изучения обратных тригонометрических функций.

Задачи бакалаврской работы:

– рассмотреть основное содержание темы «Обратные тригонометрические функции»;

– проанализировать варианты изложения темы «Обратные тригонометрические функции» в школьных учебниках;

– разработать серии задач по теме «Обратные тригонометрические функции».

Методы исследования: анализ учебно-методической и математической литературы; изучение нормативных документов; изучение опыта работы учителей; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение, две главы («Теоретические аспекты изучения обратных тригонометрических функций в школьном курсе математики»; «Практические аспекты изучения темы «Обратные тригонометрические функции»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. Первая глава посвящена решению первой задачи бакалаврской работы. Рассмотрено основное содержание темы «Обратные тригонометрические функции». В первом пункте вводится понятие обратной функции.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет область определения *X* и множество значений *У*. Если каждому значению *y* из множества *У* соответствует единственное значение x из множества *X*, такое что, $f(x) = y$, то тем самым определена некоторая функция $x = \varphi(y)$ с областью определения *У*. Эта функция называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Теорема 1. Если данная функция возрастает (убывает), то и обратная ей функция возрастает (убывает).

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ – взаимно обратные функции, причем функция $y = f(x)$ возрастает. Чтобы удобнее было воспользоваться определением обратной функции, рассмотрим функцию $x = \varphi(y)$, полученную из $y = \varphi(x)$ заменой *x* на *y* и имеющую те же свойства, что $y = \varphi(x)$.

Возьмем два произвольных значения y_1 и y_2 из области определения функции $x = \varphi(y)$ такие, что $y_2 > y_1$. По определению обратной функции $x_1 = \varphi(y_1)$ ($x_2 = \varphi(y_2)$), есть такое значение аргумента функции $y = f(x)$, при котором $f(x_1) = y_1$ ($f(x_2) = y_2$). Нам нужно доказать, что $\varphi(y_2) > \varphi(y_1)$, то есть что $x_2 > x_1$. Докажем от противного: допустим, что соотношение $x_2 > x_1$, не имеет места, тогда или $x_1 = x_2$, или $x_1 > x_2$. В первом случае $f(x_1) = f(x_2)$, то есть $y_1 = y_2$, что противоречит выбору значений y_1 и y_2. Во втором случае из возрастания данной функции $y = f(x)$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, что также противоречит выбору значений y_1 и y_2.

Следовательно, предположение, что неравенство $x_2 > x_1$ не выполняется, приводит к противоречию. Значит, функции $x = \varphi(y)$ и $y = \varphi(x)$ возрастают. Ч. т. д.

Теорема 2. Если данная функция нечетна, то обратная ей функция также нечетна.

Доказательство. Пусть дана нечетная функция $y = f(x)$ для которой существует обратная функция.

Рассмотрим обратную функцию в форме $x = \varphi(y)$. Нужно доказать, что для любого y_0, принадлежащего области определения функции, $-y_0$ также принадлежит ее области определения и $\varphi(-y_0) = -\varphi(y_0)$. Обозначим $\varphi(y_0) = x_0$, тогда $f(x_0) = y_0$. Так как функция $y = f(x)$ нечетна, то $-x_0$ входит в её область определения X и $f(-x_0) = -f(x_0)$, то есть $f(-x_0) = -y_0$. Последнее равенство означает, что $-y_0$ входит в область определения Y обратной функции и $\varphi(-y_0) = -x_0 = -\varphi(y_0)$. Итак, $\varphi(-y_0) = -(y_0)$, то есть обратная функция является нечетной. Ч. т. д.

Далее вводятся функции обратные функции к $y = \sin x, y = \cos x, y = \mathrm{tg} x$ и $y=\mathrm{ctg} x$. Представлены их графики и перечислены основные свойства этих функций. Рассмотрим это на примере функции обратной $y = \cos x$.

Областью значений функции $y = \cos x$ является отрезок $[-1; 1]$. На отрезке $[0; \pi]$ функция непрерывна и монотонно убывает.

Значит, на отрезке $[0; \pi]$ определена функция, обратная функции $y = \cos x$. Эту обратную функцию называют арккосинусом и обозначают $y = \arccos x$.

Аарккосинусом числа x, если $|x| \leq 1$, называют угол, косинус которого принадлежит отрезку $[0; \pi]$; его обозначают $\arccos x$.

Таким образом, $\arccos x$ есть угол, удовлетворяющий следующим двум условиям: $\cos(\arccos x) = x, |x| \leq 1; 0 \leq \arccos x \leq \pi$.

Функция $y = \arccos x$ определена на отрезке $[-1; 1]$, областью ее значений является отрезок $[0; \pi]$. На отрезке $[-1; 1]$ функция $y = \arccos x$ непрерывна и монотонно убывает от π до 0 (поскольку $y = \cos x$ –

непрерывная и монотонно убывающая функция на отрезке $[0;\ \pi]$); на концах отрезка она достигает своих экстремальных значений: $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 1 = 0$. Отметим, что $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. График функции $y = \arccos x$ (рисунок 1) симметричен графику функции $y = \cos x$ относительно прямой $y = x$.

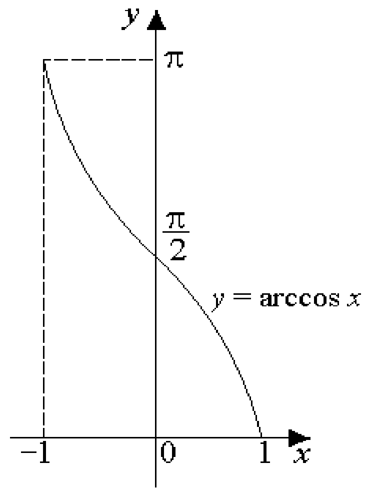

Рисунок 1

Покажем, что имеет место равенство $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

В самом деле, по определению $0 \leq \arccos x \leq \pi$. Умножая на (–1) все части последнего двойного неравенства, получаем $-\pi \leq \arccos x \leq 0$. Прибавляя π ко всем частям последнего неравенства, находим, что $0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi$.

Вторая глава посвящена решению второй и третей задач бакалаврской работы.

Анализ содержания школьных учебников Никольский С.М. и др. Алгебра и начала анализа, Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала математического анализа, Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала математического анализа по теме «Обратные тригонометрические функции» показал, что

1. Теоретический материал по теме «Обратные тригонометрические функции» изложен во всех учебниках идентично, можно работать по любому из них, но, по нашему, мнению наиболее удачным для использования является

учебник Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала математического анализа, он отличается от всех остальных проанализированных учебников большим количество примеров и упражнений;

2. Анализ задачного материала, представленного в проанализированных учебниках приводит к необходимости разработки дополнительных упражнений: (1) на построение графиков функций; (2) решения уравнений на уровне ЕГЭ; (3) исследовательских задач.

Учебники анализировались по следующим параметрам: методическая схема изучения материала; содержание теоретического материала, объем задачного материала.

Во второй главе для реализации третьей задачи бакалаврской работы подобраны и решены задачи, дополняющие задачный материал рассмотренных школьных учебников по теме «Обратные тригонометрические функции» по блокам: (1) задачи на построение графиков, в частности сложных функций (композиции тригонометрических и обратных тригонометрических функций); (2) исследовательские задачи; (3) задачи из ЕГЭ.

Рассмотрим несколько задач из каждого блока.

1. Задача 1. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. Область определения данной функции $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$. Эта функция имеет период 2π, поэтому мы можем взять любой отрезок принадлежащий длине 2π. Возьмем, например, промежуток от $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Построим график функции на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$. На этом промежутке функция $y = \arcsin(\sin x)$ тождественно равна функции y=x (Рисунок 2).

Далее построим график функции на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$. Воспользуемся формулой приведения: $\sin x = \sin(\pi - x)$. Отсюда следует, что на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$функция $y = \arcsin(\sin x)$ тождественно равна функции $y = \pi - x$. Для того, чтобы построить график функции на всей   числовой прямой мы используем свойством периодичности функции (Рисунок 3).

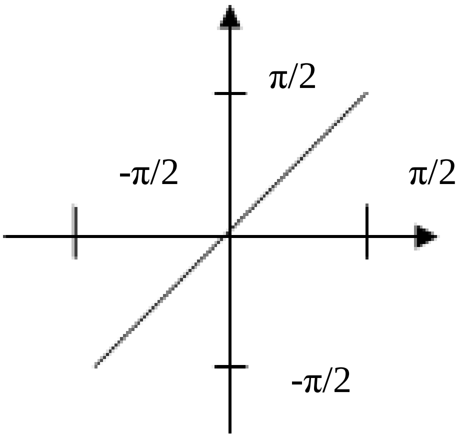

Рисунок 2

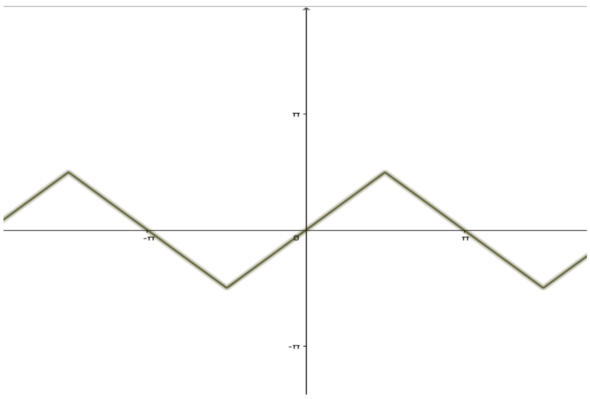

Рисунок 3

2. Задача 2. Вычислить $\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

Решение.

Первый способ:

Учитывая, что $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1$, находим: $\arcsin\left(\frac{3}{4}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{4} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{3} \times (\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}\right)$.

Второй способ:

$$\left[\begin{array}{c} \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \\ \beta = \arcsin\ \left(\frac{1}{2}\right) \\ \gamma = \alpha + \beta \end{array}\right. \Rightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) < \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.\right) \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{6} \\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \sin(\arcsin\alpha) = \frac{3}{4} \\ \cos(\arccos\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \sin(\arcsin\beta) = \frac{1}{3} \\ \cos(\arccos\beta) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$$

$\sin\gamma = \frac{3}{4} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \sin\gamma = \arcsin\left(\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}\right)$.

Ответ: $\sin\gamma = \arcsin\left(\frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}\right)$.

3. Задача 3.Решить уравнение: $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\arccos x = \pi$

Решение. Перепишем уравнение в виде $2\ arccosx = \pi - arcsin\frac{x}{2}$.

Мы имеем $\cos 2\arccos x = \cos\left(\pi - \arcsin\frac{x}{2}\right)$. Так как $\cos 2\arccos x = 2x^2 - 1$, $\cos\left(\pi - \arcsin\frac{x}{2}\right) = -\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) - \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, получаем уравнение $2x^2 - 1 = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Ответ: $x = 0$.

Задача 4. $\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1$

а) решить уравнение;

б) указать корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду: $\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\,(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$(\cos x - 1)\,(2\sin x + 1) = 0 \left[\begin{array}{l}\cos x - 1 = 0\\ 2\sin x + 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ 2\sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\pi k;\\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi z.\end{array}\right.$$

Произведем отбор корней на отрезке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ с помощью единичной окружности (Рисунок 4).

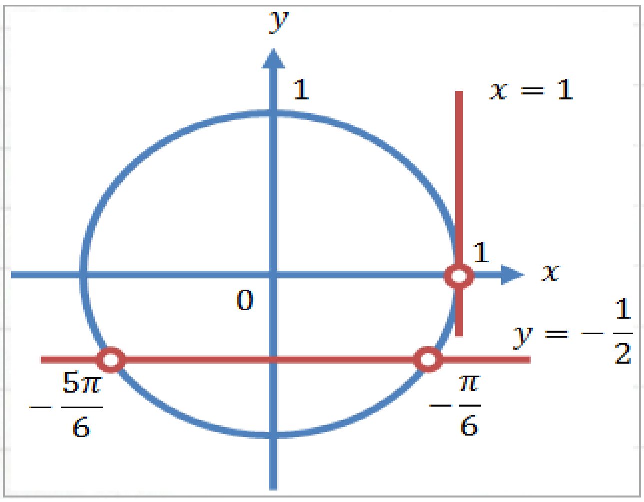

Рисунок 4

4. Разработан Урок-лекция по теме «Обратные тригонометрические уравнения»

Класс: 11

Тема урока: Обратные тригонометрические функции

Тип урока: урок – лекция, урок изучения нового материала

Цели урока: формирование знаний учащихся об обратных тригонометрических функциях и их свойствах

– предметные: обобщить и систематизировать знания по теме «Взаимно обратные функции»; развивать умения построения графиков функций; установить алгоритм построения графиков обратных тригонометрических функций.

– метапредметные: формировать культуру математической устной и письменной речи; умение работать с тетрадью и доской;

– личностные: воспитывать самостоятельность, настойчивость, ответственность и умение преодолевать трудности.

Оборудование: доска, учебник, компьютер, мультимедийный проектор.

Рассмотрим свойства функции арксинус и построим ее график.

Обозначается эта функция: $y = \arcsin x$.

Определение 1.

Арксинусом числа x, если $x \in [-1; 1]$ называют угол (или дугу), синус которого равен числу x и который принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; его обозначают $\arcsin x$.

Основные свойства функции $y = \arcsin x$:

1. Область определения функции $x \in [-1; 1]$
2. Область значений функции: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. Функция выпуклая вверх на отрезке $[-1; 0)$, выпуклая вниз – $(0; 1]$.
6. Нуль функции в точки $x = 0$.
7. Функция ограничена.

График аркфункции представлен на экране (рисунок 5):

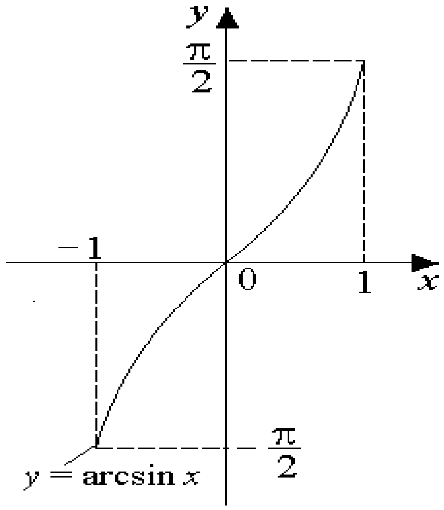

Рисунок 5

Мы видим, что никакой из участков графика данной функции не повторяется, это значит, что арксинус периодической функцией не является, в отличие от синуса. Это относиться ко всем аркфункциям.

Областью значений функции $y = \cos x$ (рисунок 6) является отрезок $[-1; 1]$. На отрезке $[0; \pi]$ функция непрерывна и монотонно убывает.

Значит, на отрезке $[0; \pi]$ определена функция, обратная функции $y = \cos x$. Эту обратную функцию называют арккосинусом и обозначают $y = \arccos x$.

Аарккосинусом числа x, если $|x| \le 1$, называют угол, косинус которого принадлежит отрезку $[0; \pi]$; его обозначают $\arccos x$.

Основные свойства функции:

1. Область определения функции: $[-1; 1]$.
2. Область значений функции: $y = [0;\ \pi]$.
3. Функция не является ни четной, ни нечетной.
4. Функция убывает на всей области определения.
5. Функция выпуклая вверх на отрезке $[0; 1]$, выпуклая вниз – $[-1; 0]$.
6. Нуль функции в точке $x = 1$.
7. Функция ограничена.

Рассмотрим график функции $y = \cos x$:

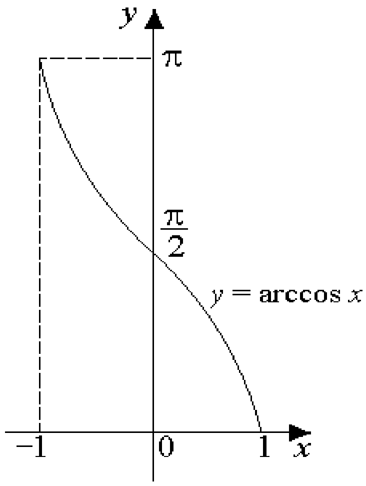

Рисунок 6

Заключение. При написании бакалаврской работы получены следующие выводы.

1. В ходе изучения математической литературы определено основное содержание темы «Обратные тригонометрические функции».

2. Анализ содержания ряда школьных учебников для общеобразовательных классов по теме «Обратные тригонометрические функции» показал, что теоретический материал по теме изложен во всех учебниках идентично, поэтому можно работать по любому из них, но, по нашему мнению, наиболее удачным для использования является учебник Ю.М. Колягина и др. Алгебра и начала математического анализа. Он отличается от всех остальных рассмотренных учебников большим количество примеров и упражнений.

3. Анализ задач представленных в рассмотренных учебниках, приводит к необходимости расширения задачного материала путем включения упражнений: (1) на построение графиков сложных функций (композиции тригонометрических и обратных тригонометрических функций); (2) задач из ЕГЭ; (3) исследовательских задач, то есть задач, решаемых несколькими способами.

Материалы бакалаврской работы могут быть использованы в учебном процессе учителями школ для проведения уроков по теме «Обратные тригонометрические функции», при подготовке учащихся к ЕГЭ, а также школьниками для самостоятельного изучения темы «Обратные тригонометрические функции».