

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Методика изучения производной в школьном курсе алгебры и начал
анализа**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль –
математическое образование) механико-математического факультета

Петрыкиной Натальи Андреевны

Научный руководитель

к. п. н., доцент

Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой

к. п. н., доцент

И. К. Кондаурова

Саратов 2018

Введение. В Концепции развития математического образования в Российской Федерации указывается, что «содержание математического образования на всех уровнях образования продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни, нарушена его преемственность между уровнями образования».

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования (ФГОС СОО) предметные результаты освоения базового курса математики включают: сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа; владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

В Примерной основной образовательной программе (ООП) СОО указано, что выпускник научится искать и находить обобщенные способы решения задач, в том числе, осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи.

Понятие производной является одним из основных понятий математического анализа. В требованиях Примерной ООП указывается, что «выпускник научится: определять значение производной функции в точке по изображению касательной к графику, проведенной в этой точке». Результаты единого государственного экзамена (ЕГЭ) показывают недостаточное усвоение материала по теме «Производная». Треть и более учащихся каждый год не справляются с заданием ЕГЭ профильного уровня, связанным с геометрическим смыслом производной.

Вопросами изучения понятия производной занимались А. Н. Колмогоров, А. Г. Мордкович, В. И. Рыжик, М. С. Мацкин, Ш. А. Алимов, С. М. Никольский, М. Я. Пратусевич, Г. К. Муравин, Ю. М. Колягин и др.

В области изучения элементов дифференциального исчисления многие исследователи обосновывали необходимость визуализации понятий (А. Н. Колмогоров, В. И. Рыжик, А. Г. Мордкович, В. В. Богун, Е. И. Смирнов, R. Duval, W. Zimmermann, T. Dreyfus, M. Giaquinto, D. Tall и др.).

В последние годы все больше исследователей изучают возможности обучения математике с использованием динамических математических сред (L. Santos-Trigo, M. G. Caligaris, А. Ганеева, Н. В. Андрафанова, И. В. Акимова). Зарубежные исследователи создают пособия, активно использующие возможности динамических сред для иллюстрации понятий, взаимосвязи объектов и изучения их свойств. По результатам исследований (В. А. Далингер, Н. А. Резник, М. И. Башмаков, Р. Л. Грегори, N. S. Newcombe, N. Presmeg, A. Arcavi), визуализация положительно влияет на усвоение содержания математического образования.

Все вышеозначенное обуславливает актуальность темы исследования.

Цели и задачи работы: выявить основные проблемы изучения производной в школьном курсе алгебры и начал анализа и пути их устранения; обосновать целесообразность использования визуализации при введении и изучении понятия производной и выбор ИКТ; разработать методические материалы для введения понятия производной с использованием ИКТ; разработать методические рекомендации по составлению задач на основе данных о реальных процессах для их анализа средствами ИКТ.

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, учебно-методической, математической литературы по исследуемой проблеме; изучение нормативных документов; изучение и обобщение педагогического опыта работы учителей; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Основные проблемы изучения производной в школьном курсе алгебры и начал анализа и пути их устранения»; «Методические материалы к введению понятия производной в школьном курсе алгебры и начал анализа»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. В первой главе бакалаврской работы изучены требования, предъявляемые нормативными документами к освоению темы «Производная», выявлены характерные черты и проблемы изучения понятия

производной; обоснованы необходимость использования большей наглядности при изучении производной в школьном курсе и целесообразность включения в учебный процесс динамической геометрической среды GeoGebra (GeoGebra).

В соответствии с ФГОС СОО у выпускников предполагается сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа. Анализ статей свидетельствует о недостаточном усвоении учащимися основ математического анализа в «идейном плане».

В Примерной ООП указано, что выпускник научится определять значение производной функции в точке по изображению касательной к графику, проведенной в этой точке и соотносить графики реальных процессов и зависимостей с их описаниями, включающими характеристики скорости изменения. Методические анализы ЕГЭ за разные годы показывают существенные трудности с достижением этих целей.

В Примерной ООП также предполагается, что выпускник научится, пользуясь графиками, сравнивать скорости возрастания или скорости убывания величин в реальных процессах и использовать графики реальных процессов для решения несложных прикладных задач, в том числе определяя по графику скорость хода процесса. Анализ учебно-методической литературы позволяет сказать о невозможности формирования требуемых умений без существенного расширения задачного материала через включение в него задач прикладного содержания.

На основе трудностей, с которыми сталкиваются выпускники при сдаче ЕГЭ, и изучения учебно-методической литературы, указывающей на то, что эффективное обучение всем элементам дифференциального исчисления в школе должно быть неформальным, интуитивно понятным и основанным на графиках и функциях, следующим этапом исследования выбран анализ характерных особенностей и проблем, наблюдающихся при введении понятия производной.

В ходе проведенного анализа школьных учебников и научно-методической литературы установлено, что: прикладные задачи, встречающиеся в рассмотренных учебниках, ориентированы на физический смысл и не связаны с

самостоятельным моделированием по данным реального процесса; переход от значения производной функции в фиксированной точке к производной в произвольной точке не является прозрачным для учащихся, в учебниках рассматривается аналитически, хотя его графическая интерпретация доступна для учащихся; геометрический смысл существования производной в точке может рассматриваться подробно; используемые средства наглядности ограничиваются статическими моделями.

Решение вышеозначенных проблем возможно за счет использования визуализации с помощью средств ИКТ.

В результате анализа отечественного и зарубежного опыта, даны определения понятий визуальное мышление и визуализация.

Визуальное мышление – мышление посредством визуальной обработки или мышление посредством визуальных операций.

Визуализация – процесс, связанный с работой над визуальными представлениями, как реальными объектами (графиками, диаграммами и другими математическими моделями), так и ментальными образами.

Обоснована необходимость: (1) развития визуально-пространственных способностей через обращение к ряду современных исследований, показывающих корреляцию визуально-пространственных и математических способностей; (2) использования визуализации, т.к. она положительно влияет на качество усвоения математических понятий.

Проанализирован опыт использования визуализации при обучении элементам дифференциального исчисления:

– использование графиков позволяет моделировать взаимосвязи объектов, выявленные на уровне алгебры, подвести к глубокому усвоению понятия;

– наибольшую пользу визуализация несет на этапах открытия (подразумевается открытие нового знания, открытие стратегии доказательства, открытие свойств математических объектов) и изучения математических объектов;

- визуализация позволяет упростить понимание формул и определений;
- благодаря визуализации легко рассмотреть контрпримеры к правдоподобным рассуждениям.

Возможной проблемой, с которой придется столкнуться при использовании визуализации, выступает несовершенство зрительного аппарата, не позволяющее использовать визуализацию как ведущий метод доказательства математических утверждений.

Наиболее целесообразный путь визуализации в обучение математики – использование ИКТ, которое позволяет: (1) внедрять новые формы организации учебного процесса, новые методы и средства обучения; (2) «видеть» математические концепции и идеи; (3) овладеть навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач; (4) сместить акцент с решения задач на исследование проблемы; (5) автоматизировать сложные вычисления и использовать результаты для более глубокого изучения тем школьного курса математики; (6) использовать данные реальных процессов в обучении математике.

Внедрение ИКТ в учебный процесс ставит ряд проблем: дезорганизация учащихся; перенасыщение информацией; недостаточное количество материалов для самостоятельного использования в обучении.

Использование ИКТ при введении производной «позволит менее способным ученикам понять основные идеи, которые слишком сложны, когда представлены строгим формальным выводом». Выбор среды GeoGebra обоснован: рекомендацией авторов одного из учебников, входящий в федеральный перечень; отзывами научных работников; гибкостью системы; растущей популярностью продукта; доступностью.

Обоснована необходимость включения задач, связанных с анализом данных реальных процессов, т.к. они, во-первых, входят в ЕГЭ, во-вторых, позволяют формировать видение межпредметных связей, в-третьих, подчеркивают необходимость изучения математики для анализа явлений различных областей наук.

Вторая глава содержит методические материалы для введения производной через геометрический смысл с использованием средств ИКТ и

методические рекомендации для составления задач прикладного содержания по теме «Производная» с опорой на геометрический смысл.

С целью расширения существующих методик изучения производной в школьном курсе алгебры и начал анализа, составлен план введения понятия производной с использованием средств ИКТ. В результате анализа статей, книг, методических рекомендаций и видео-материалов выделены условия, которые позволяют успешно работать с понятием производной: (1) связь аналитической записи и графика функции; (2) понимание функции как математической модели реального процесса; (3) усвоение на интуитивном уровне и свободное оперирование понятием предела; (4) явный переход от значения производной функции в фиксированной точке к производной функции в произвольной точке; (5) геометрическая интерпретация дифференциала и существования производной в точке.

В контексте разработки методических материалов для введения понятия производной составлены пять лабораторных работ, которые учащиеся должны выполнять в GeoGebra. Лабораторные работы входят в этапы примерного плана введения понятия производной и позволяют изучить геометрический смысл тех фактов, которые обсуждаются в ходе урока: (1) предельное положение секущей; касательная к графику функции в точке; (2) дифференциал; (3) графики производных функций; (4) касательная; дифференцируемость функции в точке и на промежутке; (5) производная и реальный мир (для экономического профиля).

В качестве примера приведем разработку лабораторной работы №3, которая позволяет прийти через геометрический смысл производной функции в точке к производной как функции от x .

Лабораторная работа в GeoGebra №3. Графики производных функций

Даны уравнения функций (линейной, квадратичной, экспоненциальной, натурального логарифма, синуса и косинуса).

Цель: прийти к графическому выводу уравнений производных функций, изученных в курсе математики средней школы. Задания:

1. Построить график одной из функций в GeoGebra.
2. Построить точки на графике (от пяти до десяти точек) с разницей в абсциссе 1-3 единицы.
3. Внести в таблицу (количество строк которой должно быть равно количеству построенных точек, столбцов – три) названия точек (первый столбец таблицы) и значения абсцисс (второй столбец).
4. Построить касательные к графику функции в выбранных точках. В третьем столбце в соответствующих строках таблицы фиксировать значения углового коэффициента касательной (значения производной функции в точке).
Первый столбец (названия точек) позволяет однозначно идентифицировать значения, т.к. благодаря графическому калькулятору можно однозначно определять, какая касательная к какой точке построена.
5. Построение точек, абсциссой которых является второй столбец, а ординатой – третий.
6. Обсуждение «принадлежат ли эти точки графику некоторой функции?».
7. Исходя из предположений необходимо построить график функции, которому могут принадлежать точки.
8. Устная проверка принадлежности точек к графику функции.

По составленному плану, изложенному во второй главе бакалаврской работы, учащиеся после выполнения лабораторной работы выполняют классический вывод формул. Таким образом, формулы производных основных элементарных функций будут получены учащимися как самостоятельно, в ходе исследования графиков функций с помощью геометрического смысла производной, так и аналитически. В соответствие с соображениями, изложенными в первой главе, учащиеся смогут сформировать устойчивые визуальные представления, позволяющие, на наш взгляд, в дальнейшем оперировать понятием производной функции сравнительно свободно.

Для моделирования явлений реального мира, анализа и решения задач прикладного содержания и отработки знаний, умений и навыков использования

геометрического смысла производной для решения задач необходимо формирование методического обеспечения, позволяющего разрабатывать задачи на основе реальных данных. Направление, выбранное в работе, – сбор статистических данных по изменению определенного процесса, связанного с научными интересами учащихся, построение математической модели, её анализ и формулирование выводов относительно явления реального мира.

Рассмотрены проблемы, которые возникают перед разработчиком такого вида задач: (1) поиск статистики и работа с ней в среде GeoGebra (автоматическое округление значений углового коэффициента, необходимость свободного расположения точек, характеризующих исследуемый процесс); (2) инструменты, необходимые для моделирования («Таблица» и «Регрессионный анализ»); (3) содержательность, требующая от разработчика заданий глубокого погружения в рассматриваемую тему. Для решения проблемы (1) найдены сайты, предоставляющие статистические данные в удобном формате.

С целью удовлетворения требований Примерной ООП, связанных с анализом реальных процессов с помощью производной, предложены возможные варианты использования статистических данных:

- анализ графиков двух различных процессов для выявления корреляции между скоростью их протекания по соответственным параметрам;
- анализ графика реального процесса с формулированием выводов о том, какие события могли влиять на скорость его изменения;
- сравнение и анализ скорости изменения нескольких процессов с выводом о том, какие два из них больше коррелируют между собой по скорости изменения в конкретные периоды времени.

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы:

1. В ходе анализа учебно-методической и математической литературы выявлены следующие проблемы, связанные с изучением производной в школьном курсе алгебры и начала анализа: недостаточное усвоение

геометрического смысла производной; излишняя формализация элементов математического анализа в школе; отсутствие навыков самостоятельного вывода формул производных элементарных функций (недостаточное усвоение определения производной).

В ходе анализа содержания школьных учебников по теме «Производная» выявлены характерные черты методики введения производной: последовательность изложения материала; количество средств наглядности и задач на геометрический смысл производной; наличие задач прикладного содержания и их характер.

Обоснована ориентация на усовершенствование методики введения понятия производной через геометрический смысл.

2. Визуализация с помощью динамических математических сред позволяет: развивать визуально-пространственные способности, коррелирующие с математическими способностями; овладеть навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач; развить способность осуществлять учебно-исследовательскую, проектную и информационно-познавательную деятельность; оперировать точными геометрическими фигурами и изменять характеристики фигур, исследуя их.

Использование ИКТ позволяет: сместить акцент с отработки формальных алгоритмов на задачи, связанные с исследованием процессов реального мира; решить проблему отсутствия необходимых знаний, умений и навыков для построения математических моделей по данным о явлениях реального мира для обучающихся в средней школе; показать целесообразность изучения производной; организовать учебно-исследовательскую деятельность учащихся.

3. Разработаны пять лабораторных работ для устранения трудностей, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении понятия производной. Лабораторные работы позволяют с помощью средств ИКТ: исследовать переход от значения производной функции в фиксированной точке к производной в произвольной точке; найти и проанализировать случаи существования и

несуществования производной функции в точке; исследовать геометрический смысл дифференциала; проанализировать данные реального процесса.

4. Сформулированы методические рекомендации для составления задач на основе данных реальных процессов, позволяющих сформировать необходимые знания, умения и навыки для удовлетворения требований Примерной ООП по трем направлениям: (1) использование графиков для сравнения скорости изменения величин в реальных процессах; (2) соотнесение графиков реальных процессов и зависимостей с их описаниями, включающими характеристики скорости изменения; (3) использование графиков реальных процессов для решения несложных прикладных задач.

Для составления задач прикладного содержания, связанных с анализом реальных процессов с помощью геометрического смысла производной, целесообразно использовать следующие сайты: (1) <https://www.gapminder.org>, (2) <https://ourworldindata.org>, (3) <https://www.google.ru/publicdata/>, (4) <https://books.google.com/ngrams/>.

В основу работы легли соображения Концепции, относящиеся к содержанию математического образования, которое (1) продолжает устаревать, (2) остается формальным и оторванным от жизни, (3) нарушена его преемственность между уровнями образования. Теоретическое и практическое содержание работы позволяет обосновать решение обозначенных проблем в контексте изучения темы «Производная» посредством включения средств ИКТ; анализа реальных процессов с помощью производной; расширения задачного материала задачами прикладного содержания.