Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Текстовые задачи в натуральных числах

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 «Педагогическое образование (профиль математическое образование)» механико-математического факультета

Джакубалиевой Юлии Владимировны

Научный руководитель
старший преподаватель ________________________ С.В. Лебедева

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ___________________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2018

Введение. Первые числа, с которыми сталкивается любой учащийся, приступающий к изучению математики – это натуральные числа. В начальном курсе математики все задачи (и математические, и практические) – это задачи «в натуральных числах», то есть определённые и решаемые на множестве натуральных чисел. Начиная с 5 класса всё меньшее число задач определяется и решается на этом множестве, а значит, из практики школьника «уходят» основные методы решения таких задач – метод исчерпывающих проб (перебора возможных вариантов) и арифметический метод решения текстовых задач (решение задачи на основании использования закономерностей протекания процессов, описанных в тексте задачи, с привлечением и записью соответствующих арифметических моделей – числовых выражений; чаще используется термин «решение по действиям»). В то же время учащиеся вооружаются новыми методами, основанными на теоретических положениях элементарной теории делимости и вычетов (остатков). Круг текстовых задач в натуральных числах заметно расширяется за счёт включения в него задач, математической моделью которых являются линейные диофантовы уравнения.

Ни один крупный математик не прошел мимо теории диофантовых уравнений. Пьер де Ферма, Л. Эйлер, Жозеф Луи Лагранж, Иоганн Карл Фридрих Гаусс, П. Л. Чебышев оставили неизгладимый след в этой интересной теории.

Несмотря на новые методический аппарат решения задач в натуральных числах, методы начальной школы остаются порой самыми простыми и действенными, особенно в случае обращения к таким задачам в условиях государственной итоговой аттестации – при написании ВПР , ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Всё вышеперечисленное определяет актуальность темы бакалаврской работы и её цель – выявить особенности текстовых задач в натуральных числах школьного курса математики.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1) определить понятие текстовой задачи в натуральных числах, выявить типы таких задач в школьном курсе математики;

2) описать методы решения текстовых задач различных типов.

Для реализации поставленных задач применялись следующие методы исследования: анализ учебной и методической литературы; теоретический анализ; анализ и обобщение педагогического опыта.

Структура бакалаврской работы: титульный лист; введение; две главы («Понятие текстовой задачи «в натуральных числах»»; «Методы решения текстовых задач в натуральных числах школьного курса математики»); заключение; список из 22 использованных источников.

Основное содержание работы. В первой главе охарактеризовано содержание модуля «Текстовые задачи в натуральных числах», также уточнены такие понятия как «задача», «текстовая задача», «задача в натуральных числах». Здесь же рассмотрены основные типы задач в натуральных числах, представленные в школьном курсе математике, а также задач встречающихся в блоке текстовых заданий как ЕГЭ, так и ОГЭ.

Текстовая задача в натуральных числах – есть множество задач, ответом к которым являются только целые числа.

Г. А. Балл предлагает такое определение: «Задача в самом общем виде – эта система, обязательными компонентами которой являются: а) предмет задачи, находящийся в исходном состоянии; б) модель требуемого состояния предмета задачи (эту модель отождествляем с требованием задачи)».

А.П. Тонких дает следующее определение этому понятию «Текстовая задача - описание некоторой ситуации (явления, процесса) на естественном и (или) математическом языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации (определить числовое значение некоторой величины по известным числовым значениям других величин и зависимостям),установить наличие или отсутствие некоторого отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения, найти последовательность требуемых действий»

Придерживаясь современной терминологии, можно сказать, что текстовая задача представляет собой словесную модель ситуации, явления, события, процесса и т.п. Как в любой модели, в текстовой задаче описывается не все событие или явление, а лишь его количественные и функциональные характеристики.

Решая текстовые задачи в натуральных числах, учащиеся приобретают новые математические знания, готовятся к практической деятельности. Задачи способствуют развитию их логического мышления.

Практически каждая задача в натуральных числах допускает решение с помощью различных моделей. Так, используя алгебраический метод, ответ на требование одной и той же задачи можно получить, составив и решив совершенно разные уравнения, используя логический метод - построив разные алгоритмы.

Во второй главе описаны методы решения текстовых задач в натуральных числах, а также рассмотрены решение математических текстовых задач, сюжетных задач, задач на «остатки», сюжетных задач на применение НОД и НОК, задач на стратегии, текстовых задач, математической моделью которых является алгебраическое уравнение или система уравнений, а также задачи на числовые множества.

Рассматривая теоретические аспекты осмысления понятия текстовой задачи необходимо обратить внимание на виды работ над текстовой задачей в натуральных числах и методы решения текстовых задач в натуральных числах школьного курса математики. Приведем примеры таких задач.

1. Решение математических текстовых задач. Основная особенность в решении математических текстовых задач состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи.

Задача 1. Михаил имеет 24 купюры двух видов – по 100 и 500 рублей на сумму 4000 рублей. Сколько у него купюр по 500 рублей?

Поскольку полученная сумма, число «круглое», то, следовательно, количество купюр по 100 рублей кратно 1000. Таким образом, количество купюр по 500 рублей тоже кратно 1000. Отсюда имеем – по 100 рублей 20 купюр; по 500 рублей – 4 купюры.

Ответ: У Михаила 4 купюры по 500 рублей.

2. Решение сюжетных задач, математической моделью которых является линейное диофантово уравнение. Ключевой идеей решения школьниками сюжетных задач, математической моделью которых является линейное диофантово уравнение, является идея делимости одних чисел на другие, а необходимым элементом решения – метод эффективного перебора (разновидность метода исчерпывающих проб).

Задача 2. Среди невиданных зверей, оставивших следы на неведомых дорожках, было стадо одноглавых тридцатичетырёхножек и трёхголовых Драконов. Всего в стаде 286 ног и 31 голова. Сколько лап у трёхголового Дракона?

Математическая модель задачи – система двух линейных диофантовых уравнений: $t = 3d = 31,\ 34t + xd = 286$, где t – число тридцатичетырёхножек, d – число драконов, x – число лап у каждого дракона.

Из первого следует: $t = 1,\ d = 10;\ t = 4,\ d = 9;\ t = 7,\ d = 8;\ t = 10,\ d = 7;\ t = 13,\ d = 6;\ t = 16,\ d = 5;\ t = 19,\ d = 4;\ t = 22,\ d = 3;\ t = 25,\ d = 2;\ t = 28,\ d = 1.$

Учащиеся могут осуществить перебор всех вариантов, подставляя во второе уравнение в поисках верного равенства – I способ решения.

Можно упростить процедуру, используя чётность и оценку значений для второго уравнения: в стаде 286 ног, это значит, что тридцатичетырёхножек не может быть больше 8, так как $34 \cdot 9 > 286$. Отсюда проверять следует только первые три пары:

$t = 1,\ d = 10 \quad 34 + 10x = 286$ $\qquad x \notin N$ *(слева число оканчивается на 4, справа – на 6)*

$t = 4,\ d = 9 \quad 68 + 9d = 286 \qquad x \notin N$ *(9d = 218 – не делится на 9)*

$t = 7,\ d = 8 \quad 238 + 8x = 286 \qquad x = 6$

Ответ: у каждого Дракона 6 лап.

3. Решение текстовых задач «на остатки». Ключевой идеей решения школьниками сюжетных задач «на остатки» является применение свойства делимости суммы и произведения, признаков делимости натуральных чисел.

<u>Задача 3</u>. При умножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков в произведении. При делении (для проверки ответа) полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

Решение: Пусть первое число − x и второе − y. Не нарушая общности предположим что $x<y$ то есть $y=x+10$.По условию ученик при подсчете произведения допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков то есть произведение уменьшилось на 40, то есть он получил $xy\text{-}40=x(x+10)\text{-}40=x^2+10x\text{-}40$. Теперь когда он поделил на x он получил в остатке 22, а в частном 39 то есть −2 нам не подходит. Ответ: 31и 41

4. Решение сюжетных задач на применение НОД и НОК. Ключевой идеей решения школьниками сюжетных задач применение НОД и НОК осуществляется на основе разложения чисел на простые множители и использовании свойств НОК и НОД.

<u>Задача 4. </u>. Каково наибольшее количество торговых точек, в которые можно поровну распределить 60 л подсолнечного и 48 л кукурузного масла? Сколько литров каждого вида при этом получит одна торговая точка.

I способ. Наибольшее количество торговых точек, в которые можно поровну распределить 60 л подсолнечного и 48 л кукурузного масла – это наибольший общий делитель чисел 60 и 48.

НОД (48;60)= 12.

48:12=4 (л) – кукурузного масла получит каждая торговая точка.

60:12=5 (л) – подсолнечного масла получит каждая торговая точка.

II способ. Если бы подсолнечного масла было столько, сколько и кукурузного – 48 литров, то есть на 12 меньше, чем дано в условии, то наибольшее количество торговых точек было бы 48, а так их не может быть больше 12. Пусть их 12 (самое большое из возможных чисел), тогда:

48:12=4 (л) – кукурузного масла получит каждая торговая точка.

60:12=5 (л) – подсолнечного масла получит каждая торговая точка.

Ответ: Торговых точек – 12. Каждая торговая точка получит 4 л кукурузного масла и 5 л подсолнечного масла.

5. Решение задач «на стратегии». Ключевой идеей решения школьниками сюжетных задач теории игр – задач «на стратегии» является экспериментальная проверка и определение выигрышной стратегии с последующим обоснованием последней, в нашем случае с использованием теории делимости (применения признаков делимости и/или свойства делимости).

<u>Задача 5.</u> Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня – вторую, и так далее. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на три, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника?

I этап (экспериментальный).

Я – Даша, моя цель – не дать Тане получить число делящееся на три, поэтому я не буду использовать цифры 3, 6 и 9. Если я напишу 1, 4 или 7, то Таня может записать 2, 5 или 8 и получить число, делящееся на три. Если я напишу 2, 5 или 8, то Таня может записать 1, 4 или 7 и получить число, делящееся на три. Таня всегда выиграет. Я же выиграю в случае арифметической ошибки Тани.

Я – Таня, моя цель – получить число делящееся на три. Пусть Даша пишет что хочет, а я до последнего хода буду писать нули, а на последнем ходу посчитаю, сумму Дашиных цифр и дополню, если это нужно до наименьшего кратного 3, например, 40201? (4+2+1=7, 7+2=9) – 402012.

Или я буду своей цифрой дополнять до наименьшего кратного 3, например, 425100.

II этап (логический).

Даша начинает, а Таня – выигрывает, так как она заканчивает, а значит, может, зная сумму первых 5 записанных цифр указать цифру, которая к сумме с имеющимися даёт (наименьшее) кратное 3, например, 13579**?** (1+3+5+7+9=25, 25+**2**=27) – 13579**2**.

У Тани есть следующая выигрышная стратегия (меньше вероятность допустить арифметическую ошибку): после очередного хода Даши Таня должна дописать к числу такую цифру, чтобы в результате получившееся число делилось на 3. Это всегда можно сделать (более того, для этого Тане достаточно использовать цифры 0, 1 и 2), тогда после каждого хода Тани написанное на доске число будет делиться на 3.

Ответ. Выиграет Таня.

6. Решение текстовых задач, математической моделью которых является алгебраическое уравнение или система уравнений. Математической моделью текстовой задачи является выражение (либо запись по действиям), если задача решается арифметическим методом, и уравнение (либо система уравнений), если задача решается алгебраическим методом.

<u>Задача 6. </u>Ученику и мастеру дано задание изготовить одинаковое количество деталей. Мастер, изготовляя 18 деталей в час, затратил на выполнение задания на 3 ч меньше, чем ученик, который изготавливал лишь 12 деталей в час. Сколько деталей было заказано?

Решение: Пусть $x-$ время затратил ученик

$x-3$ − время затратил мастер

$12x-$ изготовил ученик

$18(x-3)$ − изготовил мастер деталей.

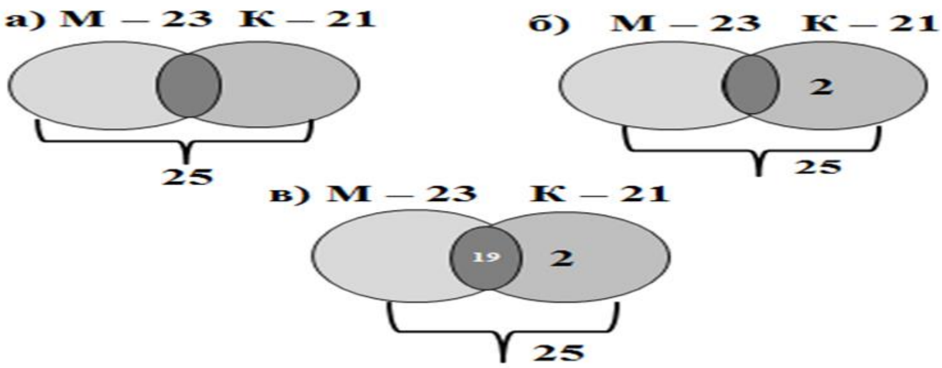
Составляем уравнение: так как количество деталей одинаковое по заданию, то: $18(x-3)=12x$, решаем уравнение: $18x-54=12x$, $18x-12x=54$, $6x=54$, $x=9$(ч) − затратил ученик, $12x=12\cdot9=108$(д) −изготовил ученик. Мастер тоже изготовил 108 деталей.

Ответ: Всего деталей было заказано 216.

7. Задачи на числовые множества. В математике чаще всего мы имеем дело с множествами элементов которыми являются числа. Такие множества называются числовыми. Рассмотрим пример такой задачи.

В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 человека, в кино – 21 ,а 5 человек не ходили ни на экскурсию, ни в кино. Сколько человек ходили и на экскурсию, и в кино?

Рассмотрим решение задачи, на рисунке 2 отражены этапы рассуждения.



1) $30-5=25$ (чел.) – ходили в кино, или на экскурсию;
2) $25-23=2$ (чел.) – ходили только в кино;
3) $21-2=19$ (чел.) – ходили и в кино, и на экскурсию.

Ответ: 19 человек ходили и в кино, и на экскурсию.

Заключение. Сформулированны основные выводы по работе.

1. Первые числа, с которыми сталкивается любой учащийся, приступающий к изучению математики – это натуральные числа. В начальном курсе математики все задачи и математические, и практические – это задачи «в натуральных числах», то есть определённые и решаемые на множестве натуральных чисел. Начиная с 5 класса, всё меньшее число задач определяется и решается на этом множестве, а значит, из практики школьника «уходят»

основные методы решения таких задач – метод исчерпывающих проб и арифметический метод. В то же время учащиеся вооружаются новыми методами, основанными на теоретических положениях элементарной теории делимости и вычетов. Круг текстовых задач в натуральных числах заметно расширяется за счёт включения в него задач, математической моделью которых являются линейные диофантовы уравнения. Несмотря на новые методический аппарат решения задач в натуральных числах методы начальной школы остаются порой самыми простыми и действенными, особенно в случае обращения к таким задачам в условиях государственной итоговой аттестации.

2. Роль текстовых задач в натуральных числах в процессе обучения математике многообразна, и она сводится главным образом к следующим функциям:

– служат усвоению математических понятий и отношений между ними;

– повышают вычислительную культуру учащихся;

– развивают у учащихся способность анализировать, рассуждать, обосновывать;

– развивают познавательные способности учащихся через усвоение способов решения задач;

– формируют универсальные качества личности, такие как привычка к систематическому интеллектуальному труду, стремление к познанию, потребность в контроле и самоконтроле и т. п.

При подготовке к ЕГЭ огромную роль играет умение решать текстовые задачи в натуральных числах рассмотренными нами способами. Данные способы решения текстовых задач приучают учащихся к первым абстракциям, позволяют воспитывать логическую культуру, могут способствовать созданию благоприятного эмоционального фона обучения, развитию у школьников эстетического чувства применительно к решению задачи и изучению математики, вызывая интерес сначала к процессу поиска решения задачи, а потом и к изучаемому. В практике используются разные способы решения задач.

В ходе бакалаврской работы рассмотренны математические текстовые задачи в натуральных числах на движение, проценты, смеси и сплавы; сюжетные задачи, математической моделью которых является линейное диофантово уравнение; текстовые задачи «на остатки»; сюжетные задачи на применение НОД и НОК; задачи «на стратегии»; текстовые задачи, моделью которых является алгебраическое уравнение или система уравнений; задачи на числовые множества.

По материалам работы опубликована статья «Использование эвристик при решении задач в натуральных числах» в сборнике материалов III Международной научно–практической конференции «Педагогический опыт: от теории к практике» (2017 г.)