

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

**Теория чисел в учебниках математики 5-6 классов**  
**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 461 группы  
направления 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль –  
математическое образование) механико-математического факультета

Гапоновой Юлии Сергеевны

Научный руководитель  
старший преподаватель \_\_\_\_\_ С.В. Лебедева

Зав. кафедрой  
к.п.н., доцент \_\_\_\_\_ И.К. Кондаурова

Саратов, 2018

**Введение.** Под элементарной теорией чисел обычно понимают «раздел теории чисел, изучающий свойства целых чисел элементарными методами». В этот раздел входят теоретические вопросы и соответствующие задачи по разделам: теория делимости целых чисел и задачи на делимость (признаки делимости, простые числа, нахождение и использование НОД, НОК); теоретико-числовые функции и задачи на нахождение суммы делителей натурального числа, количества делителей натурального числа и др.; Диофантовы уравнения, задачи на решение уравнений в целых числах; аддитивные представления натуральных чисел.

Методы решения задач теории чисел включают: логические методы: анализ, синтез, выдвижение и проверка гипотез и др.; методы элементарной математики: метод математической индукции, комбинаторные, алгебраические методы и др.; методы теории делимости: использование свойств делимости, алгоритма Евклида, сравнения по модулю, позиционной записи числа, четности.

Теория чисел в школьном курсе математики (ШКМ) – традиционный раздел математики, в котором изучаются, в числе прочего, отношения на множестве натуральных чисел, главное из которых – отношение делимости. В классическом учебнике арифметики А. П. Киселева (учебник впервые вышел в 1884 году, переработан проф. А.Я. Хинчиным в 1938 году – 15-е издание, после чего печатался без изменений, в 1955 году вышло его последнее 17-е издание) отдел 2 посвящён делимости чисел и включает:

Предварительные замечания (С. 51),

I. Признаки делимости (С. 51).

II. Разложение чисел на простые множители (С. 58).

III. Нахождение делителей составного числа (С. 65).

IV. Наибольший общий делитель нескольких чисел (С. 67).

V. Наименьшее общее кратное нескольких чисел (С. 71).

Сегодня вопросы делимости чисел в общеобразовательной школе изучаются в курсе математики 5-6-х классов, в курсе алгебры основной школы и алгебры и начал анализа старшей школы. Задачи элементарной теории чисел

включают в олимпиады по математике для школьников на разных этапах их проведения. Кроме того, задачи элементарной теории чисел входят в ВПР для 5-6 классов, ОГЭ и ЕГЭ по математике базового и профильного уровня.

Вопросами элементарной теории чисел, так или иначе, занимались все авторы учебников, задачников и методических пособий по арифметике для средних школ: И. К. Андронов, М. И. Башмаков, В. М. Брадис, Е. А. Бунимович, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев, В. В. Козлов, А. Г. Мерзляк, А. Г. Мордкович, Г. К. Муравин, С. М. Никольский, Л. Г. Петерсон, И. Ф. Шарыгин и др.

Однако, теория и практика обучения элементарной теории чисел в современной общеобразовательной школе до сих пор не были представлены в целостном виде.

Цель дипломной работы – на основе анализа содержания школьных учебников пропедевтического курса математики выявить методическую схему изучения элементарной теории чисел на современном этапе развития школьного математического образования.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

- 1) Провести сравнительный анализ учебников математики 5-6, рекомендованных МО к использованию в учебном процессе в 2017-18 уч. году, по ряду критериев, позволяющих выявить методическую схему изучения элементарной теории чисел.
- 2) Дать методические рекомендации к изучению элементарной теории чисел в пропедевтическом курсе математики.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: анализ психолого-педагогической, методической и учебной литературы; теоретический анализ (теоретическое обобщение, системный анализ, моделирование); анализ и обобщение педагогического опыта; методы описательной статистики результатов статистического исследования; педагогическое проектирование.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка из 36 использованных источников и приложений.

**Основное содержание работы.** В первой главе элементарная теория чисел рассматривается как универсальное средство формирования математических знаний младших подростков. В первом разделе выявляется роль и место элементарной теории чисел в математическом образовании школьников; формулируются общие принципы формирования математических знаний (теоретических, операциональных и практических) в контексте изучения элементов теории чисел: научности, наглядности, принцип систематичности, последовательности и комплексности, принцип обучения на высоком уровне трудностей, принцип прочности овладения знаниями, навыками и умениями, принцип единства формирования общелогической культуры и математического мышления, принцип связи теории с практикой и принципа историзма.

Теоретические знания элементарной теории чисел формируются на основании: принципа научности; принцип наглядности обучения; принцип систематичности, последовательности и комплексности; принцип обучения на высоком уровне трудностей.

Операциональные знания элементарной теории чисел формируются на основании: принципа прочности овладения знаниями, навыками и умениями и принципа единства формирования общелогической культуры и математического мышления.

Практические знания элементарной теории чисел формируются на основании принципа связи теории с практикой.

Элементарная теория чисел играет важную роль в математическом образовании учащихся: с изучением свойств делимости завершается формирование понятия натурального числа – фундаментального понятия, при помощи которого строятся все другие числовые системы; теоретический и задачный материал элементарной теории чисел обладает значительными возможностями для развития логического мышления, позволяет увидеть взаимосвязь истории и современности.

Элементарная теория чисел – единственный модуль пропедевтического курса математики, позволяющий формировать все виды математического знания: теоретического, операционального и практического.

Во втором разделе первой главы проводится сравнительный анализ учебников математики для 5-6 классов, рекомендованных МО к использованию в учебном процессе в 2017-18 уч.году с целью выявить структуру, содержание и методические особенности представления модуля «Элементы теории чисел». Анализ проводится на соответствие принципам формирования математических знаний по следующим критериям: 1) принадлежность к определённому разделу числовой линии модуля «Делимость натуральных чисел»; 2) соответствие числа дидактических единиц теоретического материала возрастным особенностям учащихся; 3) разнообразная наглядность при изложении новых знаний; 4) система задач и упражнений, должна содержать: упражнения для усвоения теоретического материала, упражнения для закрепления операциональных знаний (математических умений и навыков), упражнения для освоения и совершенствования практических знаний (практических умений и других универсальных учебных действий), 5) наличие заданий повышенной сложности, в том числе исследовательских; 6) наличие заданий для самоконтроля; 7) наличие заданий для целенаправленной работы с понятиями, суждениями и умозаключениями; 8) наличие достаточного числа практических задач для реализации принципа связи теории и практики; 9) обращение к научно-историческому материалу (частота, способы обращения). Результаты исследования позволили выделить два УМК с высоким рейтингом: «Математика. 6 класс» авторского коллектива под руководством Г.К. Муравина и «Математика. 5 класс» Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон.

На основании результатов анализа учебников, принадлежащих различным УМК, построена сводная таблица, в которой, согласно ранжированию, отражена информация о реализации принципов изучения элементарной теории делимости.

Результаты исследования позволили выделить два УМК с высоким рейтингом: I. «Математика. 6 класс» авторского коллектива под руководством Г.К. Муравина. II. «Математика. 5 класс» Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон.

Таблица. Ранжирование УМК «Математика 5[6]» на соответствие принципам изучения элементарной теории делимости

Название учебника	Принципы									Балл/ Рейтинг
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
«Арифметика. Геометрия. 5 класс» авторского коллектива под руководством Е. А. Бунимовича	1	1	8	4	3	7	5	3	5	37 / 7
«Математика. 5 класс» авторского коллектива под руководством С. М. Никольского	4	5	5	6	5	3	5	4	3	40 / 6
«Математика. 5 класс» Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин	3	7	5	3	2	5	5	5	6	41 / 5
«Математика. 5 класс» Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон	5	3	7	7	8	6	8	5	6	55 / 2
«Математика. 5 класс», авторы В.В.Козлов, А.А.Никитин и др.	2	2	6	3	8	8	4	7	4	44 / 4
«Математика. 5 класс», автор М.И. Башмаков	6	4	8	2	4	8	7	2	8	49 / 3
«Математика. 6 класс» авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка	7	6	6	5	7	2	3	6	7	49 / 3
«Математика. 6 класс» авторского коллектива под руководством Г.К. Муравина	8	8	8	8	6	4	6	8	5	61 / 1

Во второй главе рассмотрены методические рекомендации по изучению элементарной теории чисел учащимися, работающими по этим УМК, и даны соответствующие методические рекомендации для учителя по следующим направлениям:

- 1) делимость чисел как содержательная основа изучения элементов математической логики;
- 2) делимость чисел как средство углубления интереса школьников к изучению математики.

Проблема методики работы с содержанием учебника Л.Г. Петерсон по изучению делимости чисел как содержательной основы изучения элементов математической логики решается на примере поурочной разработки первого урока, посвящённого изучению элементов теории делимости.

В УМК «Математика. 5 класс» авторов: Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон; – изучение вопросов делимости чисел «тесно связано с развитием логической линии школьного курса математики: освоением понятий определения, равносильности; закреплением умения обосновывать общие высказывания посредством введения буквенных обозначений»:

- понятие делителя и кратного вводится через понятие делимости чисел;
- при нахождении НОД и НОК используется метод исчерпывающих проб (полного перебора – термин авторов УМК);

- понятие «простых» и «составных» чисел рассматривается как новая классификация натуральных чисел;

- свойства делимости доказываются на основе умения учащихся доказывать общие утверждения, вводя обозначения;

- признаки делимости выводятся на основе модели многозначного числа и свойства делимости;

- разложение на простые множители – это еще один способ нахождения делителей числа и возможность использовать разложение для нахождения НОД и НОК;

- степень числа вводится как краткая запись произведения одинаковых множителей;

- вводится понятие определения, равносильных утверждений.

При изучении содержания теории делимости учащиеся:

- методом перебора находят: (1) делители и кратные чисел, (2) НОД и НОК;

- классифицируют множество натуральных чисел по разным признакам;

- доказывают: (1) делимость чисел по определению делимости; (2) что число является простым или составным;

- для рационализации вычислений пользуются: (1) свойствами и признаками делимости; (2) дополнительными свойствами умножения и деления;

– пользуются: (1) способом введения переменных для доказательства свойств делимости; (2) понятием простого числа, признаками делимости для разложения чисел на простые множители; (3) разложением на простые множители для определения делимости и нахождения частного чисел; (4) определением степени для нахождения степени числа;

– для доказательства признаков делимости пользуются: (1) моделью многозначного числа, (2) свойствами делимости, (3) способом введения переменных для доказательства признаков делимости;

– выводят признаков делимости на 6, на 12, на 15 и т. д., используя основные признаки делимости;

– для нахождения НОД и НОК пользуются: (1) разложением на простые множители, (2) пользуются понятием взаимно простых;

– записывают: (1) признаки делимости, используя знак равносильности; (2) произведение одинаковых множителей в виде степени числа; (3) высказывания, используя понятие равносильности; (4) решения уравнений, используя понятие равносильности.

Кроме того, повышают уровень общелогической подготовки: используя понятие «определение» для выполнения заданий и построения определений; используя понятия «определение» и «равносильность» для построения логических цепочек; применяя математическую терминологию в устной и письменной речи.

Проблема изучения делимости чисел как средство углубления интереса школьников к изучению математики демонстрируется на содержании учебника Г. К. Муравина.

УМК «Математика. 6 класс» авторского коллектива под руководством Г.К. Муравина реализует концепцию развивающего обучения, при этом учебник для 6 класса обладает своей спецификой, связанной как с содержанием обучения, так и с психофизиологическими особенностями школьников этого возраста. «При изучении математики в 6 классе сделаны акценты на углублении интереса школьников к изучению математики; развитии



самостоятельности мышления школьников; создании основ для изучения систематических курсов алгебры и геометрии, которые начнутся в 7 классе».

К основным факторам развития интереса авторы методических рекомендаций для учителя относят: доступность материала учебника и ориентацию на успешность в его изучении; освобождение учебного материала от второстепенных деталей, затрудняющих концентрацию внимания школьников на основном содержании; порционную подачу материала; построение системы заданий на принципах их взаимосвязи, сглаживания дискретности уровней сложности усвоения и чередования видов деятельности: каждое следующее задание вытекает из результата выполнения предыдущего; соседние задания в системе упражнений, как правило, отличаются либо по содержанию, либо по формулировке; включение в систему: (а) задач, фабулы которых содержат интересные факты из географии, техники, биологии, истории, окружающего мира; (б) заданий, развивающих умения выделять общие свойства объектов, обосновывать свои действия, искать рациональные пути решения, строить контрпримеры; наличие рубрики «Задачи на смекалку», позволяющей углубить основное содержание курса и подготовить школьников к участию в предметных олимпиадах.

**Заключение.** Авторы современных учебников математики (арифметики) для 5/6 классов традиционно определяют место элементарной теории чисел в школьном курсе математики как необходимый теоретический базис теории обыкновенных дробей, изучение которого отнесено к курсу пятого или шестого классов, в зависимости от точки вхождения систематического изучения теории обыкновенных дробей в школьный курс математики. В исключительных случаях изучение элементарной теории делимости относят к разделу «Натуральные числа» (5 класс). Во всех случаях элементарная теория чисел выделена в отдельный раздел учебника математики.

Авторы-разработчики УМК выбрали разную манеру изложения материала элементарной теории чисел: традиционную; опережающего изложения в совокупности с непрерывным повторением (на каждом этапе

изучения нового материала параллельно с ведущей содержательно-методической линией, по которой идет расширение математических представлений, закрепляются и отрабатываются знания и умения по всем остальным разделам курса); «малыми порциями» и проблемного изложения через задачи. Несмотря на это: среднее число вводимых понятий – 13, инвариантное ядро понятийного аппарата составляют 11 понятий: делимость нацело, деление с остатком, делитель, кратное, общий делитель, общее кратное, НОД, НОК, взаимно простые числа, простое число, составное число; среди понятий, не входящих в инвариантное ядро, встречаются понятия чётного и нечётного чисел, дружественных, совершенных чисел и чисел-близнецов (простых), разложения на простые множители и др.; формируемые понятия выделяются в тексте учебника жирным шрифтом, их определения обрамляются; термины понятий, которые целенаправленно не формируются (даётся только представление), но используются в различных контекстах, выделяются в тексте курсивом; при изучении элементарной теории делимости учащиеся осваивают новые обозначения для НОД и НОК нескольких чисел; число рассматриваемых утверждений (признаков и свойств) колеблется от 14 до 27, в среднем – 21, большая часть обосновывается, незначительная строго доказывается, некоторые свойства специально не выделены и их усвоение возможно только посредством специальных вопросов и заданий, которые присутствуют в каждом учебнике; число процедур напрямую зависит от учёта восприятия материала учащимися, ориентации на формирование операционального знания; общее число дидактических единиц элементарной теории чисел варьируется от 54 (рассчитано минимум на 7 уроков) до 103 (рассчитано минимум на 15 уроков), что вполне соответствует времени, отводимому на изучение указанного модуля 15-30 часов (по различным УМК – разное).

Все анализируемые учебники удовлетворяют на высочайшем уровне принципу наглядности.

Наилучшим образом теоретический и практический материал учебника сбалансированы в УМК Г.К. Муравниа, Е.Г. Мерзляка, С.М. Никольского и Л.Г. Петерсон.

Несмотря на то, что количественные показатели позволяют объединить учебники В.В.Козлова, Г.К. Муравниа, Е.Г. Мерзляка и С.М. Никольского в группу реализующих принцип *обучения на высоком уровне трудностей*, качественный анализ задачного материала, выделенного или невыделенного авторами в категорию сложных задач, а также теоретического материала модуля выдвигает учебник Л.Г. Петерсон в число самых сложных для освоения.

По наличию и разнообразию форм реализации функции самоконтроля в первую очередь в учебнике (поскольку учебник – основная структурная единица УМК обязательная для каждого ученика) лидерами являются УМК «Математика. 5-6 классы», авторы В.В.Козлов, А.А.Никитин; УМК «Математика. 5-6 классы», автор М.И. Башмаков; УМК «Арифметика. Геометрия. 5-6 классы» авторского коллектива под руководством Е. А. Бунимовича.

Наиболее основательной можно считать логическую подготовку школьников 5 класса, изучающих математику по УМК «Математика. 5-6 классы» Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон. Одна из семи содержательно-методических линий этого УМК – логическая.

Практическая направленность элементарной теории чисел в большей степени присуща УМК «Математика. 5-6 классы» авторского коллектива под руководством Г.К. Муравниа практические задачи составляют 131 от 630 задач главы «Делимость чисел» – 21 %; в меньшей степени – УМК «Математика. 5-6 классы» Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон практические задачи, решаемые с использованием теории делимости, составляют 42 от 788 задач главы «Делимость натуральных чисел» – 5 %.

Лидером по обращению к научно-историческому материалу (частота, способы обращения) является УМК «Математика. 5 класс» М.И. Башмакова, аутсайдером – УМК С. М. Никольского.

Результаты исследования позволили выделить два УМК с высоким рейтингом: «Математика. 6 класс» авторского коллектива под руководством Г.К. Муравина и «Математика. 5 класс» Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон.

По результатам исследования опубликована статья «Роль и место элементарной теории чисел в математическом образовании школьников» в сборнике статей международной научно-практической конференции «Научные революции XXI века» (Казань, 22.05.2018).