Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Элементы аналитической геометрии в курсе основной школы
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета

Маркиной Светланы Романовны

Научный руководитель
ст. преподаватель ______________________________ С. В. Лебедева

Зав. кафедрой
к. п. н., доцент ______________________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2018

Введение. Обучение аналитической геометрии в России имеет длительную историю. Аналитическая геометрия как самостоятельная дисциплина стала изучаться в вузе с XIX века. Ее преподавание в средней школе не носило стабильного характера (аналитическая геометрия в начале XIX века входила в учебники математики, предназначенные для гимназий, с середины XIX века ее преподавание отменялось, в начале XX века она вновь включена в качестве самостоятельного предмета в реальных и коммерческих училищах).

В советской средней школе и в современной российской школе аналитическая геометрия не существует в качестве отдельной дисциплины, она растворилась во всем курсе математики. К сожалению, в сложившейся образовательной практике при изучении аналитической геометрии в школе формируются искаженные понятия. Для образования правильных обобщенных ассоциаций необходимо уже в школе сориентировать учащихся на то, что предлагаемые им определения понятий ограничены, и их углубление и уточнение будут иметь место в вузе.

Аналитическая геометрия может послужить основой для разработки комплекса лабораторных работ, предоставляя учащимся возможность совершенствования внутрипредметных связей.

Сказанное позволяет сформулировать цель бакалаврской работы – разработать общие рекомендации по изучению элементов аналитической геометрии в школьном курсе математики 5-9 классов.

Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1) охарактеризовать модуль «Элементы аналитической геометрии», выявить степень его интеграции в основные содержательно-методические линии курса основной школы;

2) продемонстрировать специфику решения задач аналитической геометрии и описать (в общих чертах) методику обучения решению задач аналитической геометрии;

3) сформулировать методические рекомендации по изучению геометрии на прямой и на плоскости (в пропедевтическом курсе математики);

4) сформулировать методические рекомендации по изучению векторов и координат в курсе геометрии.

Для реализации поставленных задач применялись следующие методы исследования: анализ учебной и методической литературы; системный анализ; анализ и обобщение педагогического опыта.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

Основное содержание работы. В первой главе охарактеризовано содержание модуля «Элементы аналитической геометрии» на ступени основного общего образования с учётом интеграции с основными содержательно-методическими линиями школьного курса математики. Здесь же представлены основные типы задач аналитической геометрии школьного курса математики, и описание метода решения задач классической геометрии средствами аналитической геометрии.

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат.

Во ФГОС ООО прописаны следующие интеграционные связи элементов аналитической геометрии в другие содержательно-методические линии школьного курса математики: определение положения точки по ее координатам, определение координат точки по ее положению на плоскости (интеграция с функционально-графической линией); оперирование на базовом уровне понятиями: вектор, сумма векторов, произведение вектора на число, координаты на плоскости; решение задач на нахождение геометрических величин (длина и расстояние, величина угла, площадь) по образцам или алгоритмам (интеграция с линией геометрических величин); формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач (интеграция с линией геометрических фигур). Также аналитическая геометрия имеет место в географии, навигации, туризме, астрономии и физике.

Первое знакомство с элементами аналитической происходит в курсе математики 5-6 классов. В курсе алгебры основной школы прямоугольная система координат на плоскости с равными единицами измерения длин на координатных осях становится важнейшим средством изучения функций и их свойств, графического решения уравнений и неравенств. Решение задач аналитической геометрии осуществляется только при изучении соответствующих модулей в 9 классе. Использовать элементы аналитической геометрии можно при изучении других разделов школьного курса математики, осуществляя, таким образом, внутрипредметную интеграцию. Это позволит систематизировать знания учащихся, установить логические связи между различными понятиями, темами и разделами математики, формировать представления о математике как о целостной единой науке. Изучаемые в школе свойства геометрических фигур можно разбить на аффинные и метрические. Примерами аффинных теорем являются, например, теоремы о пересечении диагоналей параллелограмма и параллелепипеда, о пересечении медиан треугольника и т. д. Длины отрезков, меры углов, площади геометрических фигур в общем случае не сохраняются при параллельном проектировании, но сохраняются при движениях. Примерами метрических утверждений служат: теорема Пифагора и теорема, обратная ей; теорема о пересечении прямых, содержащих высоты треугольника и т. п. При использовании векторного и координатного метода базовыми задачами являются задачи, позволяющие с помощью векторов или координат выражать аффинные свойства основных геометрических фигур (точек и прямых). Для векторного описания этих свойств достаточно операций сложения и вычитания векторов и операции умножения вектора на число. В число базовых (опорных метрических) задач войдут задачи, в которых на векторной основе строятся алгоритмы вычисления длин, углов и других метрических величин. Для решения этих опорных задач и записи полученных при этом формул, кроме названных операций, используется скалярное произведение векторов. Выделение опорных задач и формул позволяет сводить решение многих школьных геометрических задач к применению известных формул и стандартных приемов, ведущих от условия задачи к искомому результату, и тем самым алгоритмизировать процесс их решения.

Алгоритм решения задач методами аналитической геометрии:

1) перевод условия задачи на векторный или координатный язык;

2) введение средств аналитической геометрии («прикрепляются» вектора или «присоединяется» координатная плоскость);

3) составление и решение уравнений;

4) результаты аналитического решения переводятся на геометрический язык задачи.

Во второй главе сформулированы методические рекомендации по изучению элементов аналитической геометрии в курсе наглядной геометрии 6 класса (в форме поурочных разработок).

Цель изучения аналитической геометрии в 5-6 классах – ознакомление с некоторыми видами отображения фигур, что готовит учащихся к сознательному усвоению идей геометрических преобразований.

Для рассмотрения организации изучения координат в 6 классе был выбран УМК «Математика. Наглядная геометрия. 5-6 классы» Шарыгина И.Ф.

Основное содержание темы «Координаты, координаты, координаты …»: определение местонахождения объектов на географической карте; определение положения корабля в игре «Морской бой»; координатная плоскость; координаты точки на плоскости; полярные координаты: угол и расстояние; декартова система координат в пространстве.

Основной вид деятельности учащихся при изучении темы «Координаты, координаты, координаты …» – находить координаты точки и строить точку по ее координатам на плоскости.

Основные понятия: система координат, декартова и полярная системы координат, метод координат, метод раскраски. При изложении содержания реализованы внутрипредметные связи с алгеброй (метод координат) и межпредметные связи с географией.

При изучении темы «Координаты, координаты, координаты…» достигаются результаты:

предметные: находить координаты точки и строить точку по ее координатам на прямой и плоскости; пользоваться методом координат на прямой, на плоскости и в пространстве; использовать метод раскраски для решения геометрических задач;

метапредметные: самостоятельное заполнение карты объектами и описание их расположения с помощью координат, формирование коммуникативных умений;

личностные: развитие инициативы и фантазии.

Урок направлен на систематизацию и обобщение имеющихся у учащихся геометрических представлений, содержит ряд познавательных и практических заданий, направленных на приобретение опыта геометрической и исследовательской деятельности, формирование умения наблюдать, конструировать и делать выводы. Урок строится на принципе фузионизма, что способствует развитию пространственного мышления. Включены исторические сведения, фрагменты литературных произведений, иллюстрации живописи и упражнения из реальной жизни, что способствует созданию единой геометрической картины.

Окончив обучение в 6 классе, учащийся получает знания, которые способствуют успешному освоению аналитической геометрии в дальнейшем обучении, а именно: отмечать на координатной плоскости точку по заданным координатам, находить координаты заданных точек, оптимально выбирать систему координат, находить длину отрезка по координатам точек.

Во второй части второй главы сформулированы методические рекомендации по изучению векторов и координат в курсе планиметрии (в форме методических схем и комментарий к ним).

Цель изучения векторов и координат в курсе планиметрии – познакомить учащихся с новыми методами решения задач.

Для рассмотрения организации изучения векторов и координат в 9 классе был выбран УМК «Геометрия. 7-9 классы» Л.С. Атанасяна, поскольку материал учебника построен так, что учащийся может самостоятельно решить многие задачи и подготовиться к урокам закрепления знаний, векторы рассматриваются изначально как самостоятельный математический объект, а центральное место отведено координатному методу, с помощью которого решаются задачи и выводятся новые теоретические положения.

Основное содержание главы «Векторы» (10 часов): понятие вектора, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, применение векторов к решению задач.

Рассмотрим в качестве примера методическую схему изучения темы «Сложение и вычитание векторов».

На данную тему отводится 3 часа (1 урок – сумма двух векторов, законы сложения векторов, правило параллелограмма, 2 урок – сумма нескольких векторов, вычитание векторов, 3 урок – решение задач). Дидактические цели: ввести понятия суммы и разности двух векторов, рассмотреть законы сложения векторов и на их основе ввести понятие суммы трёх и более векторов; научить строить сумму двух данных векторов, используя правила треугольника и параллелограмма, сумму нескольких векторов, используя правило многоугольника, строить разность двух данных векторов двумя способами.

Обучение правилам сложения векторов начинают с физических примеров: в успевающих классах – перемещение материальной точки (в соответствие с материалом учебника), в классах с плохой успеваемостью – с примера реальной математики: «Мальчик из дома пошел в магазин, а из магазина в школу, что составляет его суммарное перемещение?».

Методическая схема изучения суммы векторов:

1) физический пример перемещения материальной точки / реального объекта; вектор – это перемещение из одной точки в другую;

2) конструктивное определение суммы векторов – правило треугольника;

3) доказательство единственности суммы векторов;

4) обозначение суммы векторов;

5) суммирование с нулевым вектором;

6) теоремы о свойствах суммы векторов (с доказательством) – переместительный и сочетательный законы суммирования векторов;

7) правило параллелограмма;

8) суммирование нескольких векторов – правило многоугольника;

9) понятие и определение разности векторов;

10) задача о построении разности векторов;

11) понятие противоположного вектора;

12) теорема о замене разности векторов суммированием с противоположным вектором (с доказательством).

Свойства сложения векторов следует изложить в виде лекции, используя мультимедийные презентации в качестве средства наглядности.

Для лучшего усвоения изложенного материала целесообразно выполнить следующие практические задания и упражнения в указанном порядке:

№ 753. Турист прошел 20 км на восток из города A в город B, а потом 30 км на восток в город C. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$?

№ 754. Начертите попарно неколлениарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Постройте векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b}$. Какие из построенных векторов равны друг другу?

№ 759 (рекомендуется решить без помощи чертежа). Дан произвольный четырёхугольник MNPQ. Докажите, что (а) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$; (б) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$.

Упражнение 1. Упростите выражения:

(а) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}\right) + \overrightarrow{KM}$; (б) $\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{XY}\right) + \overrightarrow{NX}$.

Упражнение 2. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия:

а) $\overrightarrow{EF} + \left(\overrightarrow{FP} + \vec{x}\right) = \overrightarrow{EM}$; б) $\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}\right) = \overrightarrow{MK} + \vec{x}$.

№ 755. Начертите попарно неколлениарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.

№ 761. Докажите, что если A, B, C и D – произвольные точки, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

№ 762. Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$, $\left|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$.

№ 756. Начертите попарно неколлениарные векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x} - \vec{y}$, $\vec{z} - \vec{y}$, $\vec{x} - \vec{z}$, $-\vec{x}, -\vec{y}, -\vec{z}$.

Упражнение 3. Упростите выражение $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{QM} - \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{CF}$.

Упражнение 4. Найдите вектор $\vec{x}$ из условия:

$$\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{NR} + \overrightarrow{PQ} - \vec{x} - \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{RQ}.$$

Основное содержание главы «Метод координат» (11 часов): координаты вектора, действия над векторами с заданными координатами, вычисление длины вектора по его координатам, вычисление длины отрезка и координат его середины по координатам концов отрезка, уравнения окружности и прямой, применение метода координат при решении геометрических задач.

Цель изучения координат на данном этапе обучения – расширить и углубить представления учащихся о методе координат, развить умение применять алгебраический аппарат при решении геометрических задач.

В конце изучения тем «Координаты» и «Векторы» целесообразно провести урок по одновременному решению задач всеми методами и их сопоставительному анализу. В процессе обсуждения решения со всем классом выделяются критерии применимости того или иного метода в данной ситуации, а также его плюсы и минусы. Покажем на примере задачи: в произвольном треугольнике ABC биссектриса BE перпендикулярна медиане AD, причем BE = 4, AD = 4; требуется найти стороны треугольника ABC.

Решение методом координат. Пусть O – точка пересечения биссектрисы BE и медианы AD. Соотнесём её с началом системы координат, в которой ось абсцисс совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{OD}$, а $\frac{OD}{2}$ – единичный отрезок координатной плоскости (рисунок 1).

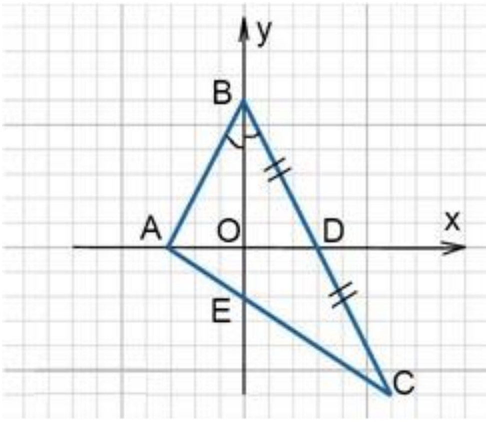

Рисунок 1 – Чертёж к задаче.

Прямоугольные треугольники ABO и DBO равны по двум равным сторонам и углу. Поэтому AO = OD = 2 и AB = BD, так что BC = 2AB.

В введенной системе координат точки A, D, B имеют следующие координаты: A(–2; 0), B(0; b), и D(2; 0).

Число b можно выразить через координаты точек C и E. Зная, что D – середина BC, получаем, что C (4; –b). Найдем вторую координату точки E(0; y), пользуясь тем, что она принадлежит прямой AC. Уравнение прямой AC имеет вид: $bx + 6y + 2b = 0$.

Координаты точки E(0; y) этому уравнению удовлетворяют, поэтому, подставив в него 0 вместо x, получим, что $y = -\frac{1}{3}b$. Следовательно, $BE = \frac{4}{3}b$. По условию задачи, BE = 4, значит, b = 3.

Итак, имеем A(–2; 0), B(0; 3), C(4; –3). Теперь, зная координаты вершин треугольника ABC, найдем его стороны: AB = $\sqrt{13}$, BC = $2\sqrt{13}$, AC = $3\sqrt{5}$.

Решение векторным методом. Введем обозначения: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Теперь через $\vec{a}$ и $\vec{c}$ выразим векторы $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AD}$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ и из того, что $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$, следует, что $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AE}$. По формуле деления отрезка в данном отношении имеем: $\overrightarrow{BE} = \frac{\vec{c}+2\vec{a}}{3}$.

По правилу вычитания векторов $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$. Длины векторов $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ и $\overrightarrow{AD}$ известны.

Пусть $|\vec{a}|= \vec{a}$, тогда $|\vec{c}| = 2\vec{a}$. Вычислив скалярные квадраты векторов BE и AD, получим уравнения: $2\overrightarrow{a^2} + \vec{a}\vec{c} = 36$; $2\overrightarrow{a^2} – \vec{a}\vec{c} = 16$;

Отсюда $\vec{a}^2$= 13 и $\vec{a}\vec{c}$ = 10. Значит, : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{13}$,

Найдем сторону AC по теореме косинусов: $\overrightarrow{AC}^2 = 5\vec{a}^2 – 2\vec{a}\vec{c}$. Подставив, вместо $\vec{a}^2$ и $\vec{\mathrm{a}}\vec{\mathrm{c}}$ найденные выше значения, получим $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\sqrt{5}$.

Ответ: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{13}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\sqrt{5}$.

Заключение. Основные результаты, полученные при написании бакалаврской работы.

1. Аналитическая геометрия представляет большой благодатный материал для активизации деятельности учащихся с помощью моторной деятельности и наглядности. Этот материал может послужить основой для разработки комплекса лабораторных работ.

2. Первое знакомство с элементами аналитической происходит в курсе математики 5-6 классов.

3. В курсе алгебры основной школы прямоугольная система координат на плоскости становится важнейшим средством изучения функций и их свойств, графического решения уравнений и неравенств.

4. Решение задач аналитической геометрии осуществляется только при изучении соответствующих модулей в 9 классе.

5. Использовать элементы аналитической геометрии можно при изучении других разделов школьного курса математики, осуществляя, таким образом, внутрипредметную интеграцию. Это позволит систематизировать знания учащихся, установить логические связи между различными понятиями, темами и разделами математики, формировать представления о математике как о целостной единой науке.

6. Изучаемые в школе свойства геометрических фигур, можно разбить на аффинные и метрические.