Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 3 курса 322 группы
направление 44.04.01 – Педагогическое образование
механико-математического факультета
Аберясьевой Екатерины Владленовны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент _____________ Е.В. Разумовская

Зав.кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____________ Д.В. Прохоров

Саратов 2017

Введение

Решению показательных неравенств отводится важное место в школьном курсе математики. Впервые они встречаются в 10 классе, после того, как познакомятся с показательной функцией и ее свойствами. Показательные уравнения, неравенства, системы содержащие показательные неравенства, встречаются в заданиях ЕГЭ, и для того, чтобы правильно систему неравенств, нужно правильно решить показательное неравенство.

При решении показательных неравенств часто возникают трудности, связанные со следующими особенностями:

— Затрудняются анализировать задачу перед выбором способа и метода решения;

— Незнание алгоритма решения показательных неравенств;

— Производят преобразования, которые неравносильны исходным неравенствам;

— При введении новой переменной забывают возвращаться к обратной замене.

Вышесказанное определяет актуальность выбранной темы и полезность ее изучения для педагогической практики.

Магистерская работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Методы решения показательных неравенств».

Электронный образовательный курс «Методы решения показательных неравенств» – это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы, и обеспечивает все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации для обучающегося по изучению данной темы.

Основные цели создания электронного образовательного курса:

- при реализации образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий повысить качество обучения;

- создание электронной информационно-образовательной среды, обеспечивающий индивидуальный подход в образовательном процессе.

Задачи создания электронного образовательного курса:

- в системе дистанционного образования Ipsilon создать электронный курс соответствующий единым требованиям к структуре, отдельным элементам ЭОК и технологиям обучения по нему;

- обеспечить по теме «Методы решения показательных неравенств» учебно-методическими и контрольно измерительными материалами, реализуемой в системе дистанционного образования Ipsilon.

Рекомендую следующий порядок изучения данного электронного курса.

В первой главе «Историческая справка» носит ознакомительный характер, в ней приведены исторические справки о возникновении степени и показательной функции. Во второй главе «Показательные неравенства» рассматриваются показательная функция и её свойства, а так же показательные неравенства с постоянным основанием и показательные неравенства с переменным основанием, и описаны методы решения показательных неравенств. В третьей главе «Контрольные вопросы» приведены вопросы, на которые необходимо ответить после изучения предыдущих глав. В четвертой главе «Тренировочные задачи» предоставлены тренировочные задачи базового уровня сложности, тренировочные задачи среднего уровня сложности, тренировочные задачи повышенного уровня сложности. И в последней, пятой главе «Решение тренировочных задач» приведены решения тренировочных задачи базового уровня сложности, среднего уровня сложности, повышенного уровня сложности.

Основное содержание работы

Показательные неравенства с постоянным основанием

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными.

Простейшим показательным неравенством называется неравенство вида:

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}, \text{ где } "\vee" \text{ означает } >, <, \geq, \leq .$$

Знаком " $\wedge$ " будем обозначать противоположный к исходному знак неравенства.

Решение простейших показательных неравенств основано:

1. на свойстве показательной функции $y = a^x$;

- если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастающая;
- если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывающая.

2. на определении возрастающей (убывающей) функции:

- Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a; b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$выполняется условие: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Другими словами, большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции.

- Функция $y = f(\text{x})$ называется убывающей на интервале $(a; b)$,если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$выполняется условие: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

Другими словами, большему значению аргумента из этого интервала соответствует меньшее значение функции.

При решении показательных неравенств необходимо помнить, что решение любого показательного неравенства сводиться к решению простейших показательных неравенств.

Показательные неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

При решении показательных неравенств используются следующие утверждения:

1. Если основание степени больше единицы, то при переходе к выражениям, стоящим в показателе, знак неравенства сохраняется.

Если, $a > 1$, то неравенство

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x).$$

Пример 1.

Решить неравенство:

$3^x < \frac{1}{9}$

Решение:

Поскольку $\frac{1}{9} = 3^{-2}$, то

$3^x < 3^{-2}$, т.к. $3 > 1$, функция - возрастает, то $x < -2$.

Ответ: $(-\infty; -2)$.

2. Если основание степени больше нуля, но меньше единицы, то при переходе к выражениям, стоящим в показателе, знак неравенства меняется на противоположный.

Если $0 < a < 1$, то неравенство

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x).$$

Пример 2.

Решить неравенство:

$0{,}5^{x^2} < 0{,}5^{x+2}$;

Решение:

$x^2 > x + 2$, т.к. 0,5 <1 функция у $= 2^t$ убывает, то

$x^2 - x - 2 > 0$;

$(x + 1)(x - 2) > 0$;

$x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Показательные неравенства $a^{f(x)} \vee b$

Показательные неравенства вида $a^{f(x)} \vee b$, называются простейшими показательными неравенствами.

Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} > b$,то:

а) при a > 1 и b> 0 получим $a^{f(x)} > \log_a b$;

б) при a > *1* и $b \leq 0$ получим $x \epsilon D(f)$;

в) при 0< a < 1 и b> 0 получим $a^{f(x)} < \log_a b$;

г)при 0< a < 1 и b< 0 получим $x \epsilon D(f)$.

Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} < b$, то:

а) при a >1 и b> 0 получим $a^{f(x)} < \log_a b$;

б) при a > *0* и b≤ 0 получим$x \epsilon \emptyset$;

в) при 0< a < 1 и b> 0 получим $a^{f(x)} > \log_a b$;

г) при 0< a < 1 *и* b< 0 получим $x \epsilon \emptyset$;

Пример 1.

Решить неравенство:

$2^x < 7$;

Решение:

$2^x > 7$;

$2^x > 2^{\log_2 7}$;

$x > \log_2 7$;

$x \in (\log_2 7 ; +\infty)$;

Ответ: $x \in (\log_2 7 ; +\infty)$.

Показательные неравенства вида $a^{f(x)} \vee b^{f(x)}$

При решении таких неравенств, применяют логарифмирование обеих частей по основанию a илиb.

Учитывая свойства показательной функции, используются следующие утверждения:

1. Если a > 1, то неравенство $a^{f(x)} \vee b^{f(x)}$равносильно неравенству

$f(x) \vee g(x) \log_a b;$

2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} \vee b^{f(x)}$равносильно неравенств

$f(x) \wedge g(x) \log_a b;$

Пример 1.

Решить неравенство:

$3^x \geq 2^{x^2};$

Решение:

$3^x \geq 2^{x^2}$. Прологарифмируем обе части по основанию 3. Тогда получим:

$\log_3 3^x \geq \log_3 2^{x^2};$

$x \geq x^2 \log_3 2;$

$x - x^2 \log_3 2 \geq 0;$

$x(1 - x \log_3 2) \geq 0;$

$x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right];$

$x \in [0; \log_2 3];$

Ответ: $x \in [0; \log_2 3]$.

Решение показательных неравенств методом замены переменной.

Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным

При решении показательных неравенств, сводящихся к квадратным неравенствам, делают замену переменных, получают квадратное неравенство, которое решают, а затем возвращаются к прежней переменной.

Общий вид показательного неравенства, приводимого к квадратному:

$$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \gamma \vee 0,$$

где $a > 0, a \neq 1, \alpha, \beta, \gamma -$ некоторые числа.

Неравенства такого вида с помощью введения вспомогательной переменной приводят к квадратному неравенству.

Пусть $a^{f(x)} = t$. Поскольку степень с положительным основанием является положительным числом, можем ввести ограничение на t: $t > 0$.

Получаем квадратное неравенство относительно t. Решаем его.

Возвращаясь к исходной переменной, решаем простейшее показательное неравенство.

Пример 1.

Решить неравенство:

$9^x + 27 < 36^x$;

Решение:

$9^x + 27 < 36^x$;

Пусть $3^x = t$ тогда исходное неравенство равносильно:

$3 < t < 9$;

$3 < 3^x < 9$;

$3^1 < 3^x < 3^2$;

$1 < x < 2$;

Ответ: $x \in (1; 2)$.

Замечание: Неравенство вида

$$\alpha a^{\,2f(x)} + \gamma a^{-f(x)} + \beta \vee 0,$$

приводится к выше приведенным неравенствам домножением на $a^{f(x)}$ обеих частей неравенства. Получаем квадратное неравенство относительно t. Решаем его. Возвращаясь к исходной переменной, решаем простейшее показательное неравенство.

Пример 2.

Решите неравенство: $\frac{1}{7^x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$.

Решение:

$\frac{1}{7^x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4, 7^{-x} - 3 \cdot 7 \cdot 7^x > 4$ умножим обе части неравенства на 7^x,

$-4 \cdot 7^x - 21 \cdot 7^x + 1 > 0;\ 21 \cdot 7^x + 4 \cdot 7^x — 1 < 0$. Пусть $7^x = t, t > 0$, тогда исходное неравенство равносильно: $21t^2 + 4t - 1 < 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 21 \cdot (-1) = 100;\ x = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}; t_1 = -\frac{1}{3}; t_2 = \frac{1}{7}$.

Подставим $7^x = t,\ 7^x < \frac{1}{7}; x < -1$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1)$.

Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

К данному виду относятся неравенства типа

$$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} b^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} \vee 0,$$

так как $b^{2f(x)} \neq 0$, то разделим почленно наше неравенство на $b^{2f(x)}$:

$$\alpha \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \beta \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \gamma \vee 0,$$

Вводя новую переменную $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t,\ t > 0.$

Получаем квадратное неравенство относительно *t*. Решаем его.

Возвращаясь к исходной переменной, решаем простейшее показательное неравенство.

Пример 1.

Решите неравенство:

$3 \cdot 49^x - 16 \cdot 21^x + 21 \cdot 9^x < 0.$

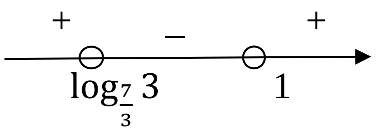
Решение: $3 \cdot 49^x - 16 \cdot 21^x + 21 \cdot 9^x < 0,$

разделим обе части неравенства на 21^x; $3 \cdot \frac{49^x}{21^x} - 16 \cdot \frac{21^x}{21^x} + 21 \cdot \frac{9^x}{21^x} > 0;$

$3 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{2x} - 16 + 21 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-x} + 9 < 0.$ Пусть $\left(\frac{7}{3}\right)^{x} = t, t > 0$, тогда исходное неравенство равносильно: $3t - 16 + 21 \cdot t^{-1} < 0$; $3t^2 - 16t + 21 < 0.$

$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 21 = 4;\ t = \frac{16 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3}; t_1 = \frac{7}{3}; t_2 = 3.$

Подставим $\left(\frac{7}{3}\right)^{x} = t$,$\left(\frac{7}{3}\right)^{x} < \frac{7}{3}$ или $\left(\frac{7}{3}\right)^{x} < 3$; $x < 1$ или $x < \log_{\frac{7}{3}} 3$



$(-\infty; \log_{\frac{7}{3}} 3) \cup (1; \infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_{\frac{7}{3}} 3) \cup (1; \infty).$

Показательные неравенства с переменным основанием

Неравенства вида $\boldsymbol{u(x)^{f(x)} \vee u(x)^{g(x)}}$

Множество решений неравенства $u(x)^{f(x)} \vee u(x)^{g(x)}$ составляет решение следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < u(x) < 1, \\ f(x) \wedge g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} u(x) > 1\,, \\ f(x) \vee g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенства вида $\boldsymbol{x^{\log_a x} \vee b}$

Решая такие неравенства, в первую очередь нужно прологарифмировать обе части по основанию a, получим

$$\log_a x^{\log_a x} \vee \log_a b,$$

$$\log_a x \cdot \log_a x \vee \log_a b,$$

$$\log^2{}_a x \vee \log_a b.$$

Пример 1.

Решить неравенство: $x^{\log_2 \sqrt{x}} > 4$

Решение: $x^{\log_2 \sqrt{x}} > 4;$

$\mathrm{Log}_2\, x^{\log_2 \sqrt{x}} > \log_2 4\,;$

$\log_2 x^{0,5} \cdot \log_2 x > 2;$

$\log^2{}_2\, x > 4;$

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x < -2; \\ \log_2 x > 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 0{,}25; \\ x > 4. \end{array}\right.$

Ответ: $(0; 0{,}25) \cup (4; +\infty).$

Заключение

В данном дистанционном проекте реализована тема «Методы решения показательных неравенств».

При дистанционном обучении базой образовательного процесса является целенаправленная и контролируемая самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться удобном для себя месте и по индивидуальному расписанию, имея при себе все необходимое для доступа к курсу и возможность поддерживать контакт с преподавателем в процессе обучения.

К достоинствам дистанционного обучения можно отнести:

Для обучаемого:

1. гибкость графика обучения;
2. есть возможность учиться по индивидуальному расписанию согласно своим возможностям и интересам;
3. объективная и независимая от преподавателя оценка знаний;
4. постоянная консультация с преподавателем в процессе обучения;
5. общедоступность.

Для преподавателей такая форма обучения, означает возможность при той же нагрузке обучать большее количество людей.

Неудивительно, что, в образовательном мире дистанционная форма обучения быстро завоевала огромную популярность.

Электронное обучение сегодня - это учебный процесс, в котором используются интерактивные электронные средства предоставления информации: диски, Internet.

Помимо решения своей первоочередной задачи - обучения на расстоянии – электронное обучение может быть отличным дополнением для очной формы обучения. А так же окажет огромную помощь в повышении качества и эффективности школьного обучения.

Электронный образовательный курс «Методы решения показательных неравенств» был апробирован в МОУ-СОШ с. Подлесное Марксовского района Саратовской области им. Ю.В.Фисенко, в результате чего реализованы следующие задачи:

- подробно рассмотрен, изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме;

- определены особенности данной темы: учитывая способности учащихся, учитель может самостоятельно подобрать методику преподавания;

- разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;

- расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебника.

Подводя итоги, можно сказать, что практическим значением данной темы, является то, что электронный курс могут использовать не только ученики средних общеобразовательных школ, но и студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов, преподаватели.

Изучению темы «Методы решения показательных неравенств» отводится важное место в школьном курсе математики. Показательные неравенства, системы, содержащие показательные неравенства, встречаются в заданиях ЕГЭ, и для того, чтобы правильно решить систему неравенств, нужно правильно решить показательное неравенство.