

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

АВТОРЕФЕРАТ

студентки 3 курса 322 группы
направления 44.04.01 Педагогическое образование

Механико-математического факультета
Дорониной Наталии Викторовны

Научный руководитель
ст. преподаватель _____ М. А. Осипцев

Зав. кафедрой
д.ф.-м. наук, профессор _____ Д. В. Прохоров

Саратов 2017

Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр. Решение задач с параметрами вызывает большие трудности у учащихся, так как их изучение не является отдельной составляющей школьного курса математики, и рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях.

Трудности при изучении данного вида уравнений связаны со следующими их особенностями:

- Обилие формул и методов, используемых при решении уравнений данного вида;
- Возможность решения одного и того же уравнения, содержащего параметр различными методами.

Выше изложенное обусловило проблему исследования, которая заключается в исследовании целесообразности и возможности изучения методов решения уравнений, содержащих параметры, в старших классах средней школы и в разработке соответствующей методики. Решение этой проблемы составило цель исследования.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре в 7-9 классах и алгебре и началам анализа в 10-11 классах.

Предметом исследования являются классы уравнений, содержащих параметры, и их методы решения.

Гипотеза исследования: применение разработанной на основе общих методов решения уравнений, содержащих параметры, методики их решения позволит учащимся решать уравнения, содержащие параметры, на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный метод решения, применять разные методы решения.

Проблема, предмет, гипотеза исследования обусловили следующие задачи:

1. Проанализировать действующие учебники алгебры и начала

анализа для выявления в них использования понятия «параметра» и методов решения уравнений, содержащих параметр;

2. выделить классы уравнений, содержащих параметры, и их методы решения.

Далее приведены примеры заданий для отработки методов решения уравнений с параметрами, разделенные на три группы. В первую группу вошли задания наименьшей сложности, можно сказать, что это базовая сложность заданий, во вторую группу вошли более сложные задания, при решении которых необходимо использовать не только прямой подход решения относительно параметров, но и специальные свойства функций или теорему Виета. Наконец, в тесты третьего уровня сложности вошли задания, повышенной сложности. Тесты третьего уровня основаны на решении задач с параметром из Единого государственного экзамена. В конце приводятся ответы к решениям.

0.1 Задания базового уровня сложности

1. Для всех значений параметра a указать решения уравнения

$$ax + 2(a - x) = x - 7$$

2. Для всех значений параметра a указать решения уравнения

$$(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3$$

3. Для всех значений параметра a указать решения уравнения

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0$$

4. Для всех значений параметра a указать решения уравнения

$$|x - a| = 2a + 3$$

5. При каком значении параметра p решение уравнения

$$3px + p^2 - 1 = 0$$

положительно?

6. При каком значении a уравнение

$$ax^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$$

имеет один корень?

7. При каких значениях a уравнение $2x^2 + x - a = 0$ имеет хотя бы один общий корень с уравнением $2x^2 - 7x + 6 = 0$?

8. При каком наименьшем натуральном значении a уравнение

$$x^2 + 2ax - 3a + 7 = 2x$$

имеет ровно два решения?

9. Найти коэффициент q в уравнении $x^2 - 2x + q = 0$, если корни x_1 и x_2 уравнения связаны соотношением $2x_1 + x_2 = 3$.

10. При каком значении параметра k система уравнений

$$\begin{cases} kx + 5y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

не имеет решения?

11. При каких значениях a система имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x - (a + 1)y = 3 \\ 2x + (a + 3)y = a + 5. \end{cases}$$

0.2 Задания второго уровня сложности

1. Найдите все значения a , при каждом из которых квадрат разности различных действительных корней трехчлена $ax^2 - 4x + 3a + 1$ меньше 8

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (9 + a)x + 9 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 , удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 2$.

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма квадратов корней трёхчлена $x^2 - 4ax + 5a - 1$ равна 2.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 + (a - 2)|x| + 5 - 6a + a^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax^4 - (a - 2)x^2 + a^2 - 9 = 0$ имеет ровно три различных корня.

6. Найдите все значения a , при каждом из которых оба корня уравнения $2x^2 - (6 - a)x + 3a - a^2 = 0$ принадлежат промежутку $(0, 2]$.

7. Найдите все значения a , при каждом из которых оба корня уравнения $x^2 - ax - a = 0$ меньше 2.

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых ни один из корней уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 2 = 0$ не входит в промежуток $(1, 5)$.

9. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$||x| - 3| = a - 3$$

имеет нечётное количество корней?

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{19x^2 - (9a + 2)x + a^2 + 1} = x - 1$ не имеет корней.

0.3 Задания третьего уровня сложности

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 - (a - 3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$$

либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

2. Найти все значения параметра a при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$$

больше чем -24 .

3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$$

имеет более двух корней.

4. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 - (3x + a)^3 + 4x^2 - 3x = a$$

имеет более одного корня.

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x - a}\right)^2 - (a + 9)\left(x + \frac{1}{x - a}\right) + 2a(9 - a) = 0$$

имеет четыре решения.

6. Найти все значения a ? при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a + 2 - 2^{x-2}}{a + 3} \leq \frac{5a + 5}{2(2^x + 3a + 3)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

7. Найти все значения параметра p , при каждом из которых множество значений функции

$$f(x) = \frac{3x + p}{x^2 + 5x + 7}$$

содержит полуинтервал $(-1, 3]$.

8. При каких значениях параметра a неравенство

$$(x^2 - (a + 2)x - 2a^2 + 4a)\sqrt{1 - x} \leq 0$$

имеет единственное решение.

9. Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется для всех x .

10. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 32^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

0.4 Ответы к тестовым заданиям

Задания базового уровня сложности:

1. $x = -\frac{7+2a}{a-3}$ при $a \neq -3$;
2. $x = \frac{3+2a}{1+a}$ при $|a| \neq -1$, $x \in \mathbb{R}$ при $a = 1$;
3. $x = \frac{1}{3}$ при $a = -\frac{4}{5}$, $x = -\frac{7}{6}$ при $a = 1$, $x = \frac{-1-2a \pm \sqrt{4+5a}}{a-1}$ при $a \in (-\frac{4}{5}, 1) \cup (1, \infty)$;
4. $x \in \{-3 - a, 3(1 + a)\}$ при $a > -\frac{3}{2}$;
5. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$;
6. $a = \frac{1}{7}$, $a = 1$;

7. $a = 6$, $a = 10$;
8. $a = 3$;
9. $q = 1$;
10. $k = 10$;
11. $a = 1$.

Задания второго уровня сложности:

1. $(-\frac{4}{3}, -1) \cup (\frac{4}{5}, 1)$;
2. $(-\infty, -15) \cup (-3, 9)$;
3. 0;
4. (1, 5);
5. (-3, 5);
6. [1, 3);
7. $(-\infty, -4] \cup [0, \frac{4}{3}]$;
8. $(-\infty, -1] \cup [6, \infty)$
9. $a = 6$;
10. $x = \frac{a}{3}$ при $a \geq 3$, $x \in \{\frac{a}{6}, \frac{a}{3}\}$ при $a \geq 6$.

Задания третьего уровня сложности:

1. $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$;
2. $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$;
3. $(-\infty, -5 - 2\sqrt{10}) \cup \{-1\} \cup (5 + 2\sqrt{10}, \frac{8}{3}) \cup (\frac{8}{3}, \infty)$;
4. $(-\frac{9}{16}, \infty)$;
5. $(-\infty, -2) \cup (2, 3) \cup (3, \frac{7}{2}) \cup (\frac{11}{2}, \infty)$;
6. $(-\infty, -3) \cup \{1\} \cup (3, \infty)$;
7. $p = 9$;
8. $[\frac{1}{2}, 1]$;
9. $(-1, 5)$;
10. $a = 4/3$.

При проведении исследования были решены следующие задачи:

1. проведен анализ действующих школьных учебников по алгебре и началам анализа с целью выявления использования параметра и методов решения уравнений с параметром. Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:
 - в каждом проанализированном учебнике задания, содержащие параметр, используется для проверки знаний и умений, приобретенных во время изучения той или иной темы. Предлагаются задания творческого характера, требующие от учащихся применения полученных знаний и умений в нестандартных условиях;
 - ни в одном из рассмотренных учебников не дается чёткого определения параметра;
 - во всех учебниках задания однотипны;
2. выделены классы уравнений, содержащих параметр, и общие их методы решения;

3. показано, что методы, изложенные в данной работе, применимы для решения всех видов уравнений, содержащих параметр. Тригонометрические уравнения, содержащие параметр, при проведении данного исследования специально не были выделены. Для данного класса уравнений существует большое количество специфических методов решения. Исследованию которых может быть посвящена отдельная работа;
4. все методы решения уравнений, содержащих параметр, рассматриваются на факультативных занятиях, но возможно также и рассмотрение некоторых методов решения уравнений, содержащих параметр, в основное время изучения курса алгебры и начал анализа, например, метода решения квадратных уравнений с параметром. Учитывая, что уравнения, содержащие параметр, встречаются уже в 7 классе, можно разбить все методы решения уравнений, содержащих параметр, на группы, которые возможно рассмотреть во время учебных занятий.