Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

# Точные и приближенные методы решения систем уравнений

## АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 3 курса 322 группы

направление **44.04.01 – Педагогическое образование**

**Механико-математического факультета**

Леоновой Полины Сергеевны

Научный руководитель

<u>доцент, к.ф.- м. н., доцент</u> ____________ В.Г. Тимофеев

Зав.кафедрой

<u>д.ф.-м.н., профессор</u> ____________ Д.В.Прохоров

Саратов 2017

## Введение

Выпускная квалификационная работа магистра представляет собой разработку электронного образовательного курса «Точные и приближенные методы решения систем уравнений». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 7-9 классов основного общего образования, и содержит элементы относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой.

Электронный образовательный курс «Точные и приближенные методы решения систем уравнений» - это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образвательной программы.

Изучение данной темы является разделом традиционным и важным во всех периодах школьного образования. Данная работа актуальна с точки зрения освоения материала, для практического знания математики не только в курсе школьной программы, но и в углубленном изучении, а так же для практического применения.

Цель считается достигнутой, если ученик на уровнях:

| *базовом* | *среднем* | *повышенном* |
|---|---|---|
| а) имеет понятие о системах уравнений; б) решает системы методом подстановки, алгебраического сложения; в) сравнивает решение однотипных систем базового уровня сложности | а)правильно воспроизводит и использует термины, полученные знания в работе с различными методами решения систем уравнений ; б) имеет представление о системах однородных уравнений, выделяет базис доказательства; в) обобщает решение однотипных задач одного типа, составляет приемы их решения с помощью подсказки. | а) самостоятельно использует полученные знания; б)владеет матричным методом; в)разбирается и самостоятельно решает все виды систем, различными методами. |

**Цель 1**: контроль усвоения теоретических знаний при работе: а) с основными определениями; б) с методами решения систем уравнений; в) с типами и классами предлагаемых задач.

Цель считается достигнутой, если ученик на уровнях:

| *базовом* | *среднем* | *повышенном* |
|---|---|---|
| а) воспроизводит схему определения понятий и формулирует определения систем; приводит примеры; перечисляет методы решения; вставляет пропущенные в определении слова; раскрывает термин понятия; подводит объект под понятие; б) решает задачи базового уровня сложности. | а) формулирует определение систем уравнений, приводит контрпримеры; умеет доказывать и разбирается в методах решения; б) выполняет доказательство на своей модели; заполняет пустую готовую схему доказательства; называет базис доказательства; воспроизводит план доказательства; в) решает задачи среднего уровня сложности. | а) Работает с предоставленными задачами конкретного уровня, формулирует определение методов Гусса, Крамера и т.д. б) описывает основную идею доказательства; указывает на особенности методов; в) решает задачи повышенного уровня сложности. |

**Цель 2**: применение знаний и интеллектуальных умений при решении геометрических и учебных задач.

Цель считается достигнутой, если ученик на уровнях:

| *базовом* | *среднем* | *повышенном* |
|---|---|---|
| решает задачи своего уровня сложности: по готовым задачам определяет каким методом необходимо решить данную систему, по неполному условию находит и обосновывает применение метода, по условию без требования, решает системы, используя помощь. | | |

**Цель 3**: формирование коммуникативных умений через включение в групповую работу; взаимопомощь, рецензирование ответов, организацию взаимоконтроля и взаимопроверки на всех уровнях.

Цель считается достигнутой, если ученик:

а) работая в группе, ведет активную работу,оказывает помощь, анализирует  ответы товарищей по выполненным заданиям предыдущих уровней с обоснованием, организует взаимоконтроль; б) оказывает помощь работающим на предыдущих уровнях; в) составляет контрольную работу в соответствии со своим уровнем освоения темы.

**Цель 4:** формирование организационных умений (целеполагание, планирование, реализация плана, саморегуляция универсальных познавательных действий).

Цель считается достигнутой, если ученик:

формулирует цели своей учебной деятельности; б) выбирает задачи и решает их; в) осуществляет самопроверку; г) составляет контрольную работу для своего уровня усвоения; д) оценивает свою итоговую деятельность по данным объективным критериям; по собственным критериям, сравнивая их с объективными критериями; е) делает выводы о дальнейших действиях, планирует коррекцию учебной познавательной деятельности.

Успешное освоение данного электронного образовательного курса окажет помощь при сдаче Основного государственного экзамена (ОГЭ) и Единого государственного экзамена (ЕГЭ).

## Основное содержание работы.

В данной работе рассматриваются точные и приближенные методы решения систем уравнений: метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных, метод исключения одной из неизвестных, матричный метод и так далее.

### Метод подстановки.

Этот метод мы применяли в 7-м классе для решения систем линейных уравнений. Тот алгоритм, который был выработан в 7-м классе, вполне пригоден для решения систем любых двух уравнений с двумя переменными x и y.

Алгоритм использования метода подстановки при решении системы двух уравнений с двумя переменными x, y.

1. Выразить y через x из одного уравнения системы.
2. Подставить полученное выражение вместо y в другое уравнение системы.
3. Решить полученное уравнение относительно x.
4. Подставить поочередно каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения вместо x в выражение y через x, полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пар значений (x; y), которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шаге.

Переменные x и y, разумеется, равноправны, поэтому с таким же успехом мы можем на первом шаге алгоритма выразить не y через x, а x через y из одного уравнения. Обычно выбирают то уравнение, которое представляется более простым, и выражают ту переменную из него, для которой эта процедура представляется более простой.

## Метод алгебраического сложения

Этот метод, как и метод подстановки, знаком из курса алгебры 7-го класса, где он применялся для решения систем линейных уравнений. В результате алгебраического сложения двух уравнений исходной системы получается уравнение, более простое, чем первое и второе уравнения системы. Этим более простым уравнением мы имеем право заменить любое уравнение заданной системы, например второе.

## Метод введения новых переменных

Метод введения новых переменных при решении систем двух уравнений с двумя переменными применяется в двух вариантах. Первый вариант: вводится одна новая переменная и используется только в одном уравнении системы. Второй вариант: вводятся две новые переменные и используются одновременно в обоих уравнениях системы.

## Метод исключения одной из неизвестных

Метод исключения неизвестных позволяет последовательно сводить решение данной системы к решению системы (или совокупности систем), содержащей на одну переменную меньше.

## Метод алгебраических преобразований уравнений системы.

Уравнения системы можно складывать, вычитать, умножать на число, перемножать, делить, соблюдая при этом возможность выполнения таких операций. Заметим, что следствие системы, получаемое в результате алгебраических преобразований, содержит все решения исходной системы, и, кроме того, оно может содержать лишние корни.

Поэтому:

1) если следствие не имеет решений, то и исходная система не имеет решений;

2) если решениями следствия окажутся действительными числа, то их нужно подставить в исходную систему и проверить, являются ли они ее корнями;

3) если решениями следствиями окажутся алгебраические выражения, то их нужно рассматривать совместно с уравнениями исходной системы. В этом случае получим равносильную систему или совокупность систем.

## Матричный метод.

Основные понятия при работе с матричным методом.

*Определение.* Матрица – это система элементов (функций, чисел и др. величин), которые расположены в виде прямоугольной таблицы. Общий вид записи матрицы представлен ниже:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \ddots \cdots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Произвольный элемент матрицы обозначается через $a_{ij}$ (элемент $i$-й строки и $j$-го столбца). Тем, кто знаком с основами алгоритмизации и программирования, будет проще, если сравнить матрицу с двумерным массивом данных (в частном случае с одномерным массивом). Матрица имеет размерность, определяемую количеством строк и столбцов.

При решении систем линейных уравнений, как правило, используют следующие методы:

1. метод Крамера;
2. метод Гаусса;
3. матричный метод.

1. Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера может быть использован в решении системы стольких линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Если определитель системы не равен нулю, то метод Крамера может быть использован в решении, если же равен нулю, то не может.

Кроме того, метод Крамера может быть использован в решении систем линейных уравнений, имеющих единственное решение.

2. Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Назван в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

3. Матричный метод решения (метод решения через обратную матрицу) систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем состоит в следующем.

Пусть дана система линейных уравнений с $n$ неизвестными (над произвольным полем):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда её можно переписать в матричной форме:

$AX = B$ где A — основная матрица системы, $B$ и $X$ — столбцы свободных членов и решений системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{n1}\ a_n \dots a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Умножим это матричное уравнение слева на $A^{-1}$ — матрицу, обратную к матрице A:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}$

Умножим это матричное уравнение слева на $A^{-1}$— матрицу, обратную к матрице A:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}\text{B}$

Так как $A^{-1}A = B,$ получаем $X = A^{-1}B.$ Правая часть этого уравнения даст столбец решений исходной системы. Условием применимости данного метода (как и вообще существования решения неоднородной системы линейных уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных) является не вырожденность матрицы A. Необходимым и достаточным условием этого является неравенство нулю определителя матрицы A:
$\det A \neq 0$

Для однородной системы линейных уравнений, то есть когда вектор $\text{B} = 0$ , действительно обратное правило: система $\text{AX} = 0$ имеет нетривиальное (то есть ненулевое) решение только если $\det A = 0.$

Такая связь между решениями однородных и неоднородных систем линейных уравнений носит название альтернативы Фредгольма

## Заключение

В данном дистанционном проекте реализована тема ««Точные и приближенные методы решения систем уравнений»».

В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться в удобном для себя месте, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

К *достоинствам* дистанционного обучения можно отнести:

- Обучение в индивидуальном темпе - скорость изучения устанавливается самим учащимся в зависимости от его личных обстоятельств и потребностей.
- Свобода и гибкость - учащийся может выбрать любой из многочисленных курсов обучения, а также самостоятельно планировать время, место и продолжительность занятий.
- Доступность - независимость от географического и временного положения обучающегося и образовательного учреждения позволяет не ограничивать себя в образовательных потребностях.
- Мобильность - эффективная реализация обратной связи между преподавателем и обучаемым является одним из основных требований и оснований успешности процесса обучения.
- Технологичность - использование в образовательном процессе новейших достижений информационных и телекоммуникационных технологий.
- Социальное равноправие - равные возможности получения образования независимо от места проживания, состояния здоровья, элитарности и материальной обеспеченности обучаемого.
- Творчество - комфортные условия для творческого самовыражения обучаемого.

Электронный образовательный курс ««Точные и приближенные методы решения систем уравнений»» был апробирован в общеобразовательной школе - технопарк, в результате чего реализованы следующие задачи:

- изучен и проанализирован теоретический материал  по данной теме, новизна и значимость данного материала для подготовки к текущему контролю и экзаменам;

- определены методические особенности данной темы, методику её преподавания каждый учитель подбирает для себя самостоятельно, учитывая способности учащихся;

- разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели.