Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Обратные тригонометрические функции

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Симоновой Полины Сергеевны

Научный руководитель

к.ф.-м.наук, доцент ____________________________ Е.В. Разумовская

подпись, дата

Зав. кафедрой

д.ф.-м.наук, профессор ____________________________ Д.В. Прохоров

подпись, дата

Саратов 2017

Введение

При профильном обучении предусмотрено изучение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Следует отметить что в стандарте эти понятия не предназначены для изучения на базовом уровне [1]-[2]. Но совершенно очевидно, что, не сформировав у учащихся представления об обратных тригонометрических функциях, нельзя считать что они смогут в полной мере решать даже простейшие тригонометрические уравнения, которые должны изучаться на базовом уровне. Нельзя считать ученика обученным решению простейших тригонометрических уравнений, если он умеет решать уравнение $\sin x = 0.5$, но не умеет решать уравнение $\sin x = 0.6$.

Понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса вводятся в курс алгебры и начал анализа [4] во время изучения учащимися простейших тригонометрических уравнений. При этом следует заметить, что практически все старшеклассники плохо знают, а тем более понимают, эти определения. Что же тогда говорить об обратных тригонометрических функциях?

Данная работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Обратные тригонометрические функции». Этот образовательный курс предназначен для учащихся профильных (10—11-х) классов физико-математического направления.

Курс «Обратные тригонометрические функции» содержит в себе полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы. Он позволяет обеспечить все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая как теоретический материал, так и средства для контроля качества усвоения материала.

Основные цели создания курса:

— приобретение практических умений выполнения заданий с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;

— создание электронной информационно-образовательной среды;

— обеспечение нового качества образования, повышение его доступности и эффективности.

Задачи создания курса:

— соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам ЭОК и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования

Ipsilon;

— обеспечение образовательного процесса учебно-методическими и контрольно измерительными материалами по теме «Обратные тригонометрические функции», реализуемой в системе дистанционного образования Ipsilon;

— постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме.

Перед изучением курса учащийся должен обладать следующими навыками и умениями:

— иметь представление о тригонометрических функциях;

— уметь строить графики тригонометрических функций;

— уметь осуществлять простейшие преобразования над тригонометрическими выражениями;

— уметь формулировать и доказывать теоремы.

В последнее время в материалах ЕГЭ и вступительных экзаменов в высшие учебные заведения, часто предлагаются задания по данной теме. Такие задачи вызывают затруднения у учащихся, так как практических заданий по этой теме в школьных учебниках мало. Данный электронный курс преследует следующие цели обучения теме «Обратные тригонометрические функции» и формирует соответствующие умения и навыки.

Цель 1: обобщение и систематизация, расширение и углубление знаний общеобразовательной программы по математике по теме «Обратные тригонометрические функции». В частности приобретение учебной информации и контроль усвоения теоретических знаний при работе:

A) с понятием обратных тригонометрических функций;

B) графиками обратных тригонометрических функций;

C) с методами решения уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями;

D) с типами и классами задач. Умения учеников соответствующие достижению данной цели представлены в Таблице 1.

	Базовый уровень	Средний уровень	Повышенный уровень
A	Составляет схему определения понятий обратных тригонометрических функций с использованием курса.	Самостоятельно составляет схему определения понятий обратных тригонометрических функций с использованием курса.	Знает четкие определения понятий и обладает навыками выведения формул для обратных тригонометрических функций.
B	Умеет использовать графики обратных тригонометрических функций с использованием курса.	Самостоятельно воспроизводит графики обратных тригонометрических функций с использованием курса.	Умеет самостоятельно изобрадать графики обратных тригонометрических функций.
C	Знает методы решения уравнений и неравенств с обратными тригонометрическини функциями.	Умеет решать простейшие уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функиями.	Умеет решать сложные уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функиями.
D	Сравнивает решение однотипных задач базового уровня сложности, классифицирует эти задачи, используя помощь. Решает задачи базового уровня сложности.	Обобщает решение однотипных задач одного типа, составляет приемы их решения с помощью подсказки. Решает задачи среднего уровня сложности.	Составляет приемы решения типов задач самостоятельно или по плану. Решает задачи повышенного уровня сложности.

Таблица 1: Умения учеников соответствующие достижению первой цели.

Цель 2: применение знаний и интеллектуальных умений при решении геометрических и учебных задач. Ученик считается достигшим данной цели, если он решает задачи своего уровня сложности, умеет работать с графиками, осуществляет простейшие преобразования, выводит формулы и умеет решать уравнения и неравенства.

Цель 3: формирование коммуникативных умений через включение в групповую работу; взаимопомощь, рецензирование ответов, организацию взаимоконтроля и взаимопроверки на всех уровнях. Цель считается достигнутой, если ученик:

— работая в группе, оказывает помощь, рецензируют ответы товарищей по выполненным заданиям предыдущих уровней с обоснованием, организует взаимоконтроль;

— оказывает помощь работающим на предыдущих уровнях;

— составляет контрольную работу в соответствии со своим уровнем освоения темы.

Цель 4: формирование организационных умений (целеполагание, планирование, реализация плана, саморегуляция универсальных познавательных действий). Цель считается достигнутой, если ученик:

— формулирует цели своей учебной деятельности;

— выбирает задачи и решает их;

— осуществляет самопроверку;

— составляет контрольную работу для своего уровня усвоения;

— оценивает свою итоговую деятельность по данным объективным критериям и по собственным критериям, сравнивая их с объективными критериями;

— делает выводы о дальнейших действиях, планирует коррекцию учебной познавательной деятельности.

Рекомендуется следующий порядок изучения данного электронного курса. Сначала необходимо ознакомиться с модулем 1 «Историческая справка». Учитывая то, что данный модуль носит ознакомительный характер, можно сразу приступить к изучению модуля 2 «Теория». Данный модуль предлагается изучать последовательно от выражений к уравнениям и неравенствам с обратными тригонометрическими функциями. После освоения теоретического материала предлагается перейти к контрольным вопросам.

После изучения теории можно браться за решение задач базового уровня сложности – это модуль 4. Каждая задача данного уровня будет оцениваться в 1 балл. Модуль считается успешно пройденным, если учащийся набрал 8 баллов. Такое количество баллов можно приравнять к оценке «5». Если учащийся набрал от 6 до 7 баллов, это говорит о менее успешном освоении модуля и приравнивается к оценке «4», от 4 до 5 баллов – это оценка «3». Наконец, если набрано менее 4 баллов, значит, есть необходимость снова вернуться к изучению теоретической части.

Когда задания базового уровня сложности не будут вызывать затруднений, можно приступать к модулю 5 «Тренировочные задачи среднего уровня сложности». Таких задач 6 и за верное решение одной задачи можно получить 2 балла, таким образом, максимальное количество баллов по данному модулю – 12. Минимальное количество баллов, которое будет свидетельствовать о прохождении данного модуля – это 7 баллов. Соответственно, 7-8 баллов – это оценка «3», 9-10 баллов – это оценка «4», 11-12 баллов – это оценка «5». Перевод в оценку необходим для самоконтроля, поэтому, если учащийся набрал менее 6 баллов и получил оценку «2», необходимо снова обратиться к теоретическому материалу.

Далее можно приступать к модулю 6 «Тренировочные задачи повышенного уровня сложности». Таких задач 5 и правильное решение каждой оценивается в 3 баллов. Если учащийся сделал правильно 3,4 задачи – это говорит о хорошем уровне знаний по теме «Обратные тригонометрические функции», 5 задач – это максимальная степень освоения данной темы.

На освоение данного электронного образовательного курса в среднем можно выделить две недели. Но это касается учеников, освоивших темы, необходимые для решения некоторых задач среднего и повышенного уровней сложности. Необходимо учитывать уровень знаний учащихся, и в каком классе предлагается прохождение данного курса.

На сайте http://ipsilon-dev.sgu.ru/ по результатам выполнения магистерской работы выставлены:

— историческая справка;

— теоретический материал по теме «Обратные тригонометрические функции»;

— контрольные вопросы по теории с выбором ответа;

— набор тренировочных задач трех уровней сложности.

Основное содержание работы

Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. arcus — дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку. Так, обычный синус позволяет по дуге окружности найти стягивающую ее хорду, а обратная функция решает противоположную задачу.

Поскольку тригонометрические функции периодичны, то обратные к ним функции не однозначны. Так, уравнение $y = sinx$, при заданном $-1 \leqslant y \leqslant 1$, имеет бесконечно много корней[6]. Действительно, в силу периодичности синуса, если x такой корень, то и $x + 2\pi n$ (где n целое) тоже будет корнем уравнения. Таким образом, обратные тригонометрические функции многозначны. Чтобы с ними было проще работать, вводят понятие их главных значений[7]. Например, если для синуса $y = sinx$, если ограничить аргумент x интервалом $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, то на этом интервале функция $y = sinx$ монотонно возрастает. Поэтому она имеет однозначную обратную функцию, которую называют арксинусом: $x = \arcsin y$.

Определение 1. *Арксинус ($y = \arcsin x$) – это функция, обратная к синусу ($x = sin\ y$), имеющая область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.*

Определение 2. *Арккосинус ($y = \arccos x$) – это функция, обратная к косинусу ($x = \cos y$), имеющая область определения $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и множество значений $0 \leqslant y \leqslant \pi$.*

Определение 3. *Арктангенс ($y = \mathrm{arctg}\, x$) – это функция, обратная к тангенсу ($x = \mathrm{tg}\, y$), имеющая область определения $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ и множество значений $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.*

Определение 4. *Арккотангенс ($y = \mathrm{arcctg}\, x$) – это функция, обратная к котангенсу ($x = \mathrm{ctg}\, y$), имеющая область определения $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ и множество значений $0 \leqslant y \leqslant \pi$.*

Вывод формул для обратных тригонометрических функций прост, но требует контроля за областью определения и значений. Это связано с тем, что тригонометрические функции периодичны и, поэтому, обратные к ним функции многозначны. Если особо не оговорено, то под обратными тригонометрическими функциями подразумевают их главные значения, которые определены не на всей области определения, а на одном из интервалов, где эти функции монотонны. Вывод формул для обратных тригонометрических функций основывается на формулах тригонометрических функций и свойствах обратных функций как таковых. При применении этих формул следует особо следить за областью значений.

Свойства обратных функций можно разбить на две группы.

В первую группу входят формулы, справедливые на всей области определения:

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$$

Во вторую группу входят формулы, справедливые только на множестве значений обратных функций.

$$\arcsin(\sin x) = x \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\cos x) = x \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

При применении этих формул нужно следить, чтобы значение обратной функции попадало в соответствующий интервал главной области значений.

Если переменная x не попадает в этот интервал, то ее следует привести к этому интервалу, применяя формулы приведения тригонометрических функций.

Рассмотрим группу уравнений, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов. Для решения таких уравнений используют следующие равносильные переходы.

$$\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leqslant 1; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

При этом системы (1) и (2) равносильны, выбор зависит от того, какое неравенство проще: $|g(x)| \leqslant 1$ (тогда используем первую систему), или $|f(x)| \leqslant 1$ (в этом случае используем вторую систему).

Следующая группа задач является чуть более сложной по сравнению с предыдущей. Это группа уравнений, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями [8],[9]. При решении уравнений такого рода, пользуются известными тригонометрическими тождествами. Иногда бывает целесообразно не обсуждать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку.

Рассуждения здесь могут быть примерно следующими: пусть требуется решить уравнение $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$. Предположим, что x_0 —- решение этого уравнения. Обозначим $\arcsin f(x_0) = \arccos g(x_0)$ через α. Тогда $\sin\alpha = f(x_0)$, $\cos\alpha = g(x_0)$, откуда $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$. Итак,

$$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1. \qquad (3)$$

Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы:

Используя формулу $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$, получаем

$$\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Rightarrow f(x)g(x) = 1. \qquad (4)$$

Используя формулу $\sin^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}$, получаем

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x) + 1}. \qquad (5)$$

Используя формулу $\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, получаем

$$\operatorname{arctg} f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x). \tag{6}$$

Используя формулу $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, получаем

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}.$$

Используя формулу $\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$, получаем

$$\arccos f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}.$$

Корнем каждого из уравнений (3)–(6) может быть только такое число x_0, для которого $f(x_0)$ и $g(x_0)$ одного знака. В противном случае множество значений левой и правой частей уравнения не пересекаются.

Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции, иногда можно свести к алгебраическим, сделав соответствующую замену переменной. При этом следует помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Решение некоторых уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$, при $(c = const)$, имеет не более одного решения.*

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.*

Теорема 3. *Если $\min\limits_X f(x) = \max\limits_X g(x) = c$ $(c = const)$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе*

$$\begin{cases} f(x) =c, \\ g(x) =c. \end{cases}$$

Рассмотрим группу неравенств, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов. Решение подобных неравенств, так же как и для уравнений, основывается, на таком свойстве этих функций, как монотонность. Функции $y = \arcsin t$ и $y = \operatorname{arctg} t$ монотонно возрастают, а функции $y = \arccos t$ и $y = \operatorname{arcctg} t$ монотонно убывают на своих областях определения. Для решения таких неравенств используют следующие равносильные переходы.

$$\arcsin f(x) \leqslant \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -1, \\ g(x) \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

$$\arccos f(x) \leqslant \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant g(x), \\ g(x) \geqslant -1, \\ f(x) \leqslant 1. \end{cases} \tag{8}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) \vee \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g(x),$$

$$\operatorname{arcctg} f(x) \vee \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \wedge g(x),$$

где $\vee$ это один из знаков неравенства, а $\wedge$ ему противоположный.

При решении неравенств, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции, целесообразно использовать метод интервалов, а в некоторых случаях учитывать свойства монотонных функций[9].

Решение некоторых неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются теоремы (1), (2) и (3).

Далее в работе представлены контрольные вопросы по теоретическому материалу, тренировочные задачи трех уровней сложности, а так же их решение.

Заключение

В данном дипломе подготовлены материалы для электронного образовательного ресурса по теме «Обратные тригонометрические функции».

В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться в удобном для себя месте, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

Дистанционная форма обучения быстро завоевала огромную популярность в образовательном мире. Электронное обучение сегодня — это учебный процесс, в котором используются интерактивные электронные средства доставки информации. К главным достоинствам дистанционного обучения можно отнести:

1)объективную и независимую от преподавателя методику оценки знаний;

2)возможность учиться по индивидуальному плану;

3)появление дополнительных возможностей подачи материала обучающимся.

Помимо решения своей первоочередной задачи - обучения на расстоянии – электронное обучение также является отличным дополнением очной формы обучения и может служить хорошим подспорьем для повышения качества и эффективности традиционного обучения.

В целом, основными достоинствами ЭО являются:

1)Большая свобода доступа - учащийся имеет возможность доступа через Интернет к электронным курсам из любого места, где есть выход в глобальную информационную сеть.

2)Компетентное, качественное образование - курсы создаются при участии целой команды специалистов, что делает ЭО зрелым и качественным обучением.

3)Возможность разделения содержания электронного курса на модули - небольшие блоки информации позволяют сделать изучение предмета более гибким и упрощают поиск нужных материалов.

4)Гибкость обучения - продолжительность и последовательность изучения материалов слушатель выбирает сам, полностью адаптируя весь процесс обучения под свои возможности и потребности.

5)Возможность развиваться в ногу со временем - пользователи электронных курсов: и преподаватели, и учащиеся развивают свои навыки и знания в соответствии с новейшими современными технологиями и стандартами. Электронные курсы также позволяют своевременно и оперативно обновлять учебные материалы.

6)Возможность определять критерии оценки знаний - в электронном обучении имеется возможность выставлять четкие критерии, по которым оцениваются знания, полученные учащимися в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Обратные тригонометрические функции» был апробирован в средней общеобразовательной школе, в результате чего реализованы следующие задачи:

— изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме, новизна и значимость данного материала;

— определены методические особенности данной темы;

— разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;

— расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебника.

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся профильных классов средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели.