

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.  
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

## **Тригонометрические уравнения и неравенства**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки курса 3 группы 322

направление 44.04.01 – Педагогическое образование

механико-математического факультета

Хомич Екатерины Александровны

Научный руководитель

к.ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

А.М. Захаров

Зав.кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

Д.В. Прохоров

Саратов 2017

## Введение

Магистерская работа представляет собой материалы для разработки электронного образовательного курса «Тригонометрические уравнения и неравенства». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 10-11-ых классов основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся как к обучению на базовом уровне, так и в классах с профильной подготовкой. Также может быть использован для отработки данной темы при подготовке к выпускным экзаменам.

Электронный образовательный курс «Тригонометрические уравнения и неравенства» – это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы, и обеспечивает все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации для обучающегося по изучению данной темы.

Основные цели создания электронного образовательного курса:

- повышение качества обучения при реализации образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;
- оптимизация деятельности педагогического состава, работающего с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;
- создание электронной информационно-образовательной среды, позволяющей осуществлять индивидуальный подход в образовательном процессе.

Задачи создания электронного образовательного курса:

- соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам ЭОК и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования Ipsilon;
- обеспечение образовательного процесса учебно-методическими и контрольно-измерительными материалами по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства», реализуемой в системе дистанционного образования Ipsilon;

- постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме.

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы, как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые могут и должны быть сформированы при их изучении и применены к решению большого числа задач теоретического и прикладного характера.

Решение тригонометрических уравнений и неравенств создаёт предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных со всем учебным материалом по тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приёмы преобразования тригонометрических выражений и так далее) и даёт возможность установить действенные связи с изученным материалом по алгебре (уравнения, равносильность уравнений, неравенства, тождественные преобразования алгебраических выражений и так далее. Иначе говоря, рассмотрение приёмов решения тригонометрических уравнений и неравенств предполагает своего рода перенос этих умений на новое содержание. В курсе алгебры 10-го класса данная тема является весьма актуальной на основных экзаменах ЕГЭ).

Учащийся перед изучением курса должен

**знать:**

- различие между тождеством и уравнением;
- теоремы, на которых основывается решение уравнений;
- формулы сокращённого умножения;
- определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса;
- периодичность тригонометрических функций;
- формулы приведения;
- основные зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла;
- формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций;
- формулы двойных, тройных и половинных углов;
- формулы обратных круговых функций и их свойства;

**уметь:**

-решать уравнения 1-й степени с одним неизвестным, с целыми и дробным членами;

-решать квадратные уравнения, биквадратные уравнения;

-решать однородные уравнения;

-решать системы уравнений 1-й степени с двумя неизвестными как с числовыми, так и с буквенными коэффициентами;

-использовать метод группировки при решении уравнений;

- изображать графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса;

-находить значение угла по его тригонометрической функции;

По результатам выполнения магистерской работы на сайте <http://epsilon-dev.sgu.ru/> выставлены:

- теоретический материал по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства»

- набор тренировочных тестов трёх уровней сложности.

**Диагностируемые цели обучения по теме: «Тригонометрические уравнения и неравенства» с помощью электронного курса. Умения и навыки, которые формируются курсом.**

**Цель 1:** приобретение учебной информации и установление интеллектуальных умений при изучении: а)понятий, б)теорем в)типов задач.

Цель считается достигнутой, если ученик на уровнях:

базовом	среднем	повышенном
а) сравнивает данные уравнения(неравенства) с простейшими; б)сравнивает решение однотипных уравнений(неравенств);	а) составляет схему определения понятия данного типа уравнения(неравенства); б) выполняет анализ и выявляет необходимые преобразования; в) решает уравнения(неравенства) известными методами	а) дает определение типов тригонометрических уравнений(неравенства), распределяет их по классам; б) выполняет анализ и определяется с набором необходимых преобразований; в) решает уравнения(неравенства) несколькими способами;

**Цель 2:** контроль усвоения теоретических знаний при работе с методами решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Цель считается достигнутой, если ученик **на базовом уровне знает:**

а) определение тригонометрического уравнения(неравенства); б) как решать простейшие тригонометрические уравнения(неравенства), и основные методы приведения данного уравнения(неравенства) к простейшему; в) как выполняется проверка решения; **на среднем уровне знает:** а) определение тригонометрического уравнения(неравенства); б) как решать простейшие тригонометрические уравнения(неравенства), и методы приведения данного уравнения(неравенства) к простейшему; в) как выполняется проверка решения; **на повышенном уровне знает:** а) определение тригонометрического уравнения(неравенства); б) в каком случае и какой метод лучше использовать для того, чтобы привести заданное уравнение(неравенство) к простейшему; в) как выполняется проверка решения.

**Цель 3:** применение знаний и интеллектуальных умений

Цель считается достигнутой, если ученик на уровнях:

базовом	среднем	повышенном
<p>Умеет:</p> <p>а) выполнять основные преобразования; б) решать простейшие тригонометрические уравнения(неравенства), и приводить данное уравнение(неравенства) к простейшему; в) выполнять проверку решения</p>	<p>Умеет:</p> <p>а) выполнять любые преобразования и решать уравнения(неравенства) 2-ой степени сложности; б) выполнять проверку решения; в) приводить примеры</p>	<p>Умеет:</p> <p>а) выполнять все необходимые преобразования и решать уравнения(неравенства) 3-ой степени сложности; б) умеет анализировать какой метод лучше использовать для того, чтобы привести заданное уравнение(неравенство) к простейшему; в) выполнять проверку решения; г) составлять простейшие тригонометрические уравнения(неравенства), и более сложные по образцу</p>

**Цель 4:** формирование коммуникативных умений через включение в групповую работу; взаимопомощь, рецензирование ответов, организацию взаимоконтроля и взаимопроверки на всех уровнях.

Цель считается достигнутой, если ученик:

а) работая в группе, оказывает помощь однокласснику; рецензирует его ответы; организует взаимоконтроль и взаимопроверку; б) оказывает помощь с выбором методов преобразования и способов решения тригонометрических уравнений и неравенств товарищам на предыдущих уровнях; в) готовит сообщение по теме и выступает с ним; г) составляет карточку для самостоятельной работы по данной теме, предлагает её товарищу и проверяет решение, анализируя ответы, и разбирает ошибки в ходе решения.

**Цель 5:** формирование организационных умений (целеполагание, планирование, реализация плана, саморегуляция универсальных познавательных действий).

Цель считается достигнутой, если ученик: а) сам выбирает уровень освоения темы; б) выбирает темы для дополнительного изучения; в) выбирает задачи и решает их; г) осуществляет самопроверку с использованием образцов; д) составляет проверочную работу для своего уровня и проверяет её; е) оценивает свою итоговую деятельность и делает выводы о дальнейших действиях.

Электронный курс по теме: «Тригонометрические уравнения и неравенства» окажет помощь при сдаче Единого государственного экзамена (ЕГЭ), так как имеет достаточно подробную теоретическую часть, наполненную примерами, и практическую часть, для отработки умений по данной теме.

#### **Структура электронного образовательного курса**

<b>Модуль 1</b>	Историческая справка
<b>Модуль 2</b>	Теоретическая часть

	<p><b>Тригонометрические уравнения</b></p> <p>Простейшие тригонометрические уравнения</p> <p>Тригонометрические уравнения, содержащие тригонометрические функции одинакового аргумента</p> <p>Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, приводящиеся к ним</p> <p>Уравнения вида <math>a \sin x + b \cos x = c</math></p> <p>Уравнения, рациональные относительно выражений <math>\sin x \pm \cos x</math> и <math>\sin x \cdot \cos x</math></p> <p>Тождественные преобразования в решении тригонометрических уравнений</p> <p>Тригонометрические функции тройного аргумента</p> <p>О форме записи множества решений</p> <p>Отбор корней в дробно-рациональных уравнениях</p> <p>О сужении области определения уравнения в процессе преобразований</p>
	<p>Решение тригонометрических уравнений возведением обеих частей уравнения в квадрат</p> <p>Методы искусственных преобразований</p> <p><b>Тригонометрические неравенства</b></p>
<b>Модуль 3</b>	Контрольные вопросы
<b>Модуль 4</b>	Тренировочные задания базового уровня сложности
<b>Модуль 5</b>	Тренировочные задания среднего уровня сложности
<b>Модуль 6</b>	Тренировочные задания повышенного уровня сложности

Изучение данного электронного курса начинается с модуля 1, он необходим для ознакомления, но может служить, как тема для доклада с целью пробудить интерес у обучающихся по данной теме и показать надобность изучения такой темы как тригонометрия, в нем рассказано как применялась тригонометрия древнегреческим математиком Аристархом Самосским . В докладе на эту тему можно подробнее рассказать как именно он вычислял от-

ношения диаметров. И как сейчас определяется расстояние Земли от Солнца или Луны. Провести небольшое сравнение.

Со второго модуля начинается теоретическая часть данного курса, она разбита на разделы, которые нужно изучать постепенно. Особое внимание нужно уделить первому разделу "Простейшие тригонометрические уравнения прежде чем приступить к последующим разделам нужно провести контроль знаний, так как без должного освоения данного раздела будет сложно решать более сложные уравнения, ведь все они сводятся к простейшим.

После изучения теоретической части предлагается ответить на контрольные вопросы. А затем перейти к тренировочным заданиям разного уровня сложности. Контрольные вопросы служат для самопроверки. Также если данный курс используется учителем, ответы на вопросы могут быть проверены им. За каждый правильный ответ дается по 3 бала, тогда 18-24 балла - это оценка «5», 16-17 – это оценка «4», 12-15 – это оценка «3».

Тренировочные задания базового уровня сложности содержат 8 вариантов по 10 заданий, для хорошей отработки решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств. Варианты также расставлены в порядке сложности. Каждая задача базового уровня будет оцениваться в 1 балл. Модуль считается успешно пройденным, если учащийся набрал от 8 до 10 баллов. Такое количество баллов можно приравнять к оценке «5». Если учащийся набрал от 6 до 7 баллов, это говорит о менее успешном освоении модуля и приравнивается к оценке «4», от 5 до 6 баллов – это оценка «3». Наконец, если набрано менее 5 баллов, значит, есть необходимость снова вернуться к изучению теоретической части.

Модуль 5 «Тренировочные задания среднего уровня сложности» состоит из 3 вариантов и содержит по 10 заданий, соответственно для выполнения этого уровня требуется больше времени и более глубокая теоретическая и практическая подготовка. За верное решение одного задания можно получить 3 балла, таким образом, максимальное количество баллов по данному модулю – 30. Минимальное количество баллов, которое будет свидетельствовать о прохождении данного модуля – это 12 баллов. Соответственно, 13 – 18 баллов – это оценка «3», 19 – 24 баллов – это оценка «4», 25-30 баллов – это оценка «5». Перевод в оценку необходим для самоконтроля, поэтому, если учащийся



набрал менее 12 баллов и получил оценку «2», необходимо снова обратиться к теоретическому материалу.

Модуль 6 «Тренировочные задания повышенного уровня сложности». Составляет из двух вариантов по 6 заданий. Каждое правильное решение оценивается в 4 баллов. Оценка «5» ставится, если набрано 20-24 балла, оценка «4» ставится, если 16-19 баллов, и оценка «3», если 12-16 баллов.

В целом по всем трем модулям: минимальный балл, свидетельствующий о прохождении всех модулей, – 41 балл, максимальный балл, свидетельствующий об успешном изучении курса, – от 82 до 88 баллов.

**Основное содержание работы** Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

$$f(x) = a, \quad (1)$$

где  $a$  – любое действительное число, а  $f(x)$  – одна из основных тригонометрических функций.

Решением простейшего тригонометрического уравнения (1) является любое число следующего вида:

$$x_k = x_0 + kT, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где  $x_0$  – некоторое решение уравнения (1),  $T$  – период. Множество всех решений вида (2) называется серией решений уравнения вида (1).

Рассмотрим решения простейших тригонометрических уравнений, они приведены в таблице.

$a$	$\sin x = a$	$\cos x = a$
$ a  \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$ a  > 1$	решений не имеет	
$a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$a \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

**Пример.** Решите неравенство  $\sin x > \frac{1}{2}$ .

**Решение.** Для начала проведем прямую  $PQ$ , которая отмечает на окружности решение уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$ . Нам же нужно выяснить какие точки

на тригонометрической окружности соответствуют решению неравенства, а именно найти точки, ордината которых больше  $\frac{1}{2}$ , это верхняя дуга  $PQ$ .

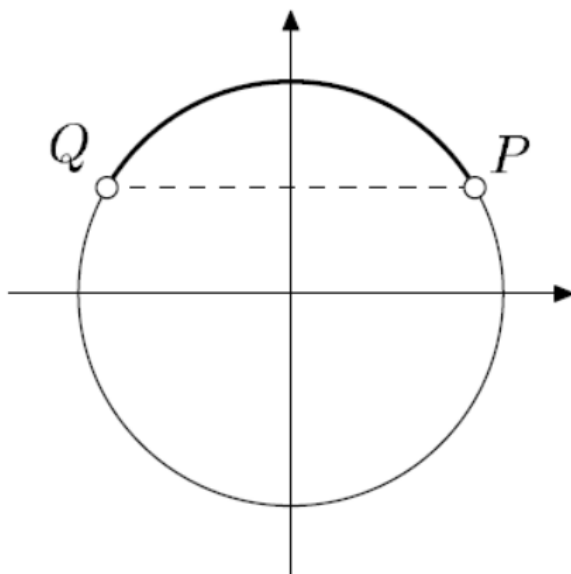


Рисунок 1

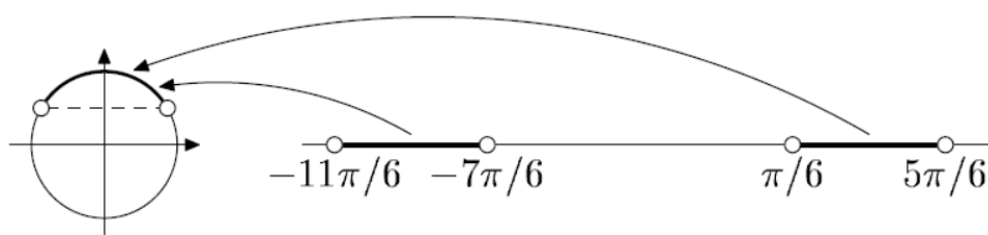


Рисунок 2

Теперь запишем множество чисел, соответствующих точкам на дуге. Это интервал  $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$ . Но так как, если точке на тригонометрической окружности соответствует число  $x$ , то ей же соответствует все числа вида  $x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . то множеством решений данного неравенства будет интервал

$$(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

**Ответ:**  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

### Контрольные вопросы

- 1) Вспомните формулы, с помощью которых решают простейшие тригонометрические уравнения.
- 2) Нарисуйте тригонометрическую окружность и обозначьте на ней основные

значения (например,  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ ).

- 3) Перечислите все известные вам методы решения тригонометрических неравенств.
- 4) Приведите пример уравнения, которое можно решить заменой переменной, решите его.
- 5) Какой вид имеет квадратное относительно  $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$  тригонометрическое уравнение? Объясните алгоритм его решения.
- 6) Какой вид имеет однородное относительно  $\sin x, \cos x$  и тригонометрическое уравнение? Какова методика его решения?
- 7) Вспомните 4 метода искусственных преобразований.
- 8) Приведите пример тригонометрического неравенства, и запишите его решение.

### Примеры тренировочных заданий базового уровня сложности

- 1) Решите уравнение:  $\operatorname{ctg}^2 2x - 6 \operatorname{ctg} 2x + 5 = 0$ 
  - а)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
  - б)  $\frac{\operatorname{arctg} 5}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
  - в)  $\frac{\operatorname{arctg} 5}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
  - г)  $\frac{\operatorname{arctg} 5}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

- 2) Решите неравенство:  $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 
  - а)  $[\frac{\pi}{2} + 4\pi n; \pi n], n \in \mathbb{Z}$
  - б)  $[-\pi + 4\pi n; 4\pi n], n \in \mathbb{Z}$
  - в)  $[\pi + 3\pi n; 4\pi n], n \in \mathbb{Z}$
  - г)  $[2\pi n; 4\pi n], n \in \mathbb{Z}$

### Примеры тренировочных заданий среднего уровня сложности

1. Найдите количество различных значений аргумента  $x \in (0; 2\pi]$ , при которых значение функции  $f(x) = \cos^5 x$  равно значению функции  $g(x) = 7 \cos^4 x + 8 \cos^3 x$

- а) 1      б) 2      в) 0      г) 3

2. Решите неравенство  $|\sin 2x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 
  - а)  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z};$
  - б)  $(3n - 1)\frac{\pi}{3} \leq x \leq (3n + 1)\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z};$
  - в)  $(2n - 1)\frac{\pi}{3} \leq x \leq (2n + 1)\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z};$
  - г)  $\frac{\pi}{3} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

### Примеры тренировочных заданий повышенного уровня сложности

1. Решите уравнение:  $\cos 2x + \cos 5x = \frac{1}{2} + \cos 4x.$
2. Решите уравнение:  $\cos x + \cos x = \frac{1}{2}.$

3. Решите уравнение:  $\sin 5x = -\frac{1}{4} \sin x$ .
4. Решите уравнение:  $\cos 5x + 2 \cos 3x + \frac{1}{16 \cos 3x} = 0$ .
5. Решите уравнение:  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x + 2} = \frac{\cos 25^\circ}{\sqrt{2} - \sin 25^\circ}$ .
6. Решите неравенство  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 < 0$ .

**Заключение** В данном дистанционном проекте реализована тема «Тригонометрические уравнения и неравенства».

В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучающегося, который мог бы учиться в удобном для себя месте, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

К достоинствам дистанционного обучения можно отнести:

Для обучающегося:

- 1) гибкость графика обучения;
- 2) возможность учиться по индивидуальному плану согласно собственным потребностям и возможностям;
- 3) объективная и независимая от преподавателя методика оценки знаний;
- 4) возможность консультироваться с преподавателем в ходе обучения;
- 5) относительная дешевизна.

Для преподавателей такая форма обучения, прежде всего, означает появление дополнительной возможности подачи материала обучающимся, то есть фактически появляется возможность при той же нагрузке обучать большее количество людей.

Неудивительно, что, при всех своих очевидных достоинствах, дистанционная форма обучения быстро завоевала огромную популярность в образовательном мире. Электронное обучение сегодня - это система обучения при помощи информационных и электронных технологий (интернет и мультимедиа).

Помимо решения своей первоочередной задачи - обучения на расстоянии посредством Интернет – электронное обучение также является отличным дополнением очной формы обучения и может служить хорошим подспорьем для повышения качества и эффективности традиционного обучения.

В целом, основными достоинствами ЭО являются:

- 1) Большая свобода доступа - учащийся имеет возможность доступа через Интернет к электронным курсам из любого места, где есть выход в глобальную информационную сеть.
- 2) Компетентное, качественное образование - курсы создаются при участии целой команды специалистов, что делает ЭО зрелым и качественным обучением.
- 3) Более низкие цены на доставку обучения - в электронном обучении процесс доставки образования включает в себя только обмен информацией через Интернет без затрат со стороны учащегося на покупку учебно-методической литературы.
- 4) Возможность разделения содержания электронного курса на модули - небольшие блоки информации позволяют сделать изучение предмета более гибким и упрощают поиск нужных материалов.
- 5) Гибкость обучения - продолжительность и последовательность изучения материалов слушатель выбирает сам, полностью адаптируя весь процесс обучения под свои возможности и потребности.
- 6) Возможность обучения на рабочем месте - учащиеся имеют возможность получать образование без отрыва от работы (при наличии таковой), а также дома, в пути с использованием мобильного Интернета.
- 7) Возможность развиваться в ногу со временем - пользователи электронных курсов: и преподаватели, и учащиеся развивают свои навыки и знания в соответствии с новейшими современными технологиями и стандартами. Электронные курсы также позволяют своевременно и оперативно обновлять учебные материалы.
- 8) Возможность определять критерии оценки знаний - в электронном обучении имеется возможность выставлять четкие критерии, по которым оцениваются знания, полученные учащимися в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Тригонометрические уравнения и неравенства» был апробирован в лицее, по результатам проверки 40% написали тест на «отлично», 20% на «хорошо», 40% на «удовлетворительно»,

В результате апробации были реализованы следующие задачи:  
- изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме, новизна и значимость данного материала для подготовки к текущему контролю и

экзаменам;

- определены методические особенности данной темы, методику её преподавания каждый учитель подбирает для себя самостоятельно, учитывая способности учащихся;
- разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;
- расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебника.

Практической значимостью работы является то, что она может использоваться как методическое пособие для учителей школ при планировании и проведении уроков по тригонометрии, а также для учеников старших классов при подготовке к ЕГЭ. Теоретическая часть включает в себя материал, который отсутствует в школьных учебниках и наполнена примерами по каждой теме. Тренировочные задания для каждого уровня сложности представлены в нескольких вариантах.

Изучение темы «Тригонометрические уравнения и неравенства» является важным на заключительном этапе школьного обучения, так как данная тема есть в выпускных экзаменах.