Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Решение уравнений и неравенств с модулем

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 3 курса 322 группы

направление **44.04.01 –Педагогическое образование**

Механико-математического факультета

Широковой Екатерины Дмитриевны

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор____________ Д.В. Прохоров

Зав.кафедрой

д.ф.-м.н., профессор ____________ Д.В.Прохоров

Саратов 2017

Введение

Материалы данной магистерской работы можно использовать доля разработки электронного образовательного курса, который называется «Решение уравнений и неравенств с модулем». Он предназначен для учеников -9 классов общего образования. В курсе содержатся элементы, которые относятся не только к обучению на базовом уровне, но и для классов с профильной подготовкой учащихся.

Электронный образовательный курс «Решение уравнений и неравенств с модулем» представляет собой систему, которая содержит комплекс методических, учебных материалов, требуемых для освоения темы согласно учебному плану – в рамках образовательной программы. Курс обеспечивает все виды работ на основании программной дисциплины, в том числе средства контроля над качеством усвоения материала, практикум, методические рекомендации обучающимся по данной теме.

Перечислим основные цели создания электронного образовательного курса:

— оптимизация работы педагогов, которые работают с использованием электронного обучения, дистанционными образовательными технологиями;
— повышение качества образования при реализации соответствующих программ с использованием электронного обучения, дистанционных технологий;
— формирование электронной образовательной, информационной среды, которая дает возможность осуществлять индивидуальный подход в процессе образования.

Задачи создания электронного образовательного курса:

— соответствие единым требованиям к структуре, которыми элементам ЭОК и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования Ipsilon;

— обеспечение процесса образования методическими, учебными, контрольно-измерительными материалами по теме «Решение уравнений и неравенств с модулем», которая реализуется в системе дистанционного образования Ipsilon;
— стабильное совершенствование, а также обновление учебно-методических материалов по указанной теме.

Изучение курса «Решение уравнений и неравенств с модулем» в основной школе по математике – это раздел традиционный, очень важный во всех классах школьного обучения. В курсе математики за 6-9 классы данная тема – актуальная, так как дает ученикам простейшие знания по рассматриваемой теме. Базовые умения, навыки, которыми должен владеть ученик перед изучением курса:

— представлять понятие «Модуль числа»;
— иметь опыт определения, измерения и сравнения длины отрезка;
— уметь доказывать и формулировать теоремы;
— иметь навыки решения задач на практике.

Диагностируемые цели обучения теме «Решение уравнений и неравенств с модулем» с помощью электронного курса. Умения и навыки, которые формируются курсом.

Цель 1: получение учебных данных, определение интеллектуальных умений в процессе изучения теорем, понятий и типов задач.

Цель будет достигнута в том случае, если ученик на уровнях:

базовом	*среднем*	*повышенном*
а) решает уравнения, содержащие один модуль; б) создает знаковую модель теоремы с использованием курса, карточек с пропусками; в) сравнивает решение однотипных задач базового уровня сложности, классифицирует эти задачи, используя помощь.	а) решает уравнения, содержащие два модуля; б) ищет доказательство с помощью схемы поиска, составляет план доказательства; выделяет базис доказательства; в) обобщает решение однотипных задач одного типа, составляет приемы их решения с помощью	а) решает уравнения, содержащие три модуля; б) ищет доказательство признака параллелограмма и свойств параллелограмма, ромба и прямоугольника самостоятельно или с помощью схемы поиска, составляет блок – схему доказательства теорем; в) составляет приемы решения типов задач самостоятельно

	подсказки.	или по плану.

Цель 2: контролировать усвоение теории при работе с теоремами, геометрическими понятиями, типами и классами задач.

Цель достигается, если ученик на уровнях:

базовом	*среднем*	*повышенном*
а) воспроизводит схему определения геометрического смысла модуля числа; приводит различные примеры; вставляет пропущенные в определении слова; раскрывает термин понятия; подводит объект под понятие; б) формулирует теоремы о свойствах модуля числа; заполняет пропуски в доказательстве, используя готовую схему; переходит от одной модели теоремы к другой; в) решает задачи базового уровня сложности.	а) воспроизводит схему определения геометрического смысла модуля числа; подводит объект под понятие; приводит контрпримеры; выводит следствия из условия принадлежности объекта данному понятию; б) выполняет доказательство на своей модели; заполняет пустую готовую схему доказательства; называет базис доказательства; воспроизводит план доказательства; в) решает задачи среднего уровня сложности.	а) формулирует определение геометрического смысла модуля числа; указывает область применения данного понятия; составляет полный набор объектов для подведения под понятие; и др. б) описывает основную идею доказательства; указывает область применения теорем; описывает способы рассуждений на этапах “открытия”, поиска доказательства теорем; в) решает задачи повышенного уровня сложности.

Цель 3: использование интеллектуальных навыков, знаний в процессе решения учебных и геометрических задач.

Цель достигается в том случае, если ученик на уровнях:

базовом	*среднем*	*повышенном*
решает задачи своего уровня сложности, составляет задачи: по неполному условию и требованию, по условию без требования, аналогичные, обратные задачи и решает их, используя помощь.		

Цель 4: формирование коммуникативных навыков посредством включения в групповую работу, рецензирования ответов, взаимопомощи, организации взаимного контроля, проверки на каждом уровне.

Цель достигается, если учащийся:

— при работе в группе помогает другим ученикам, рецензирует ответы одноклассников по выполняемым заданиям предыдущих уровней с обоснованием; организует взаимный контроль;

— помогает работающим на предыдущих уровнях;

— выстраивает контрольную работу на основании своего уровня освоения темы.

Цель 5: формирование организационных умений (планирование, целеполагание, реализация плана, регуляиця универсальных, познавательных действий). Цель достигается, если ученик:

- осуществляет самостоятельную проверку;
- формулирует цели своей деятельности;
- избирает задачи, решает их;
- составляет контрольную работу по своему уровню знаний;
- оценивает итоговую работу по объективным параметрам;
- делает выводы, планирует коррекцию познавательной, учебной деятельности.

Успешное освоение электронного образовательного курса поможет при сдаче ОГЭ (основного государственного экзамена), а также ЕГЭ.

Структура электронного образовательного курса

Целесообразно рекомендовать следующий порядок изучения данного электронного курса. Изначально ученик должен ознакомиться с модулем №1 «Историческая справка». Если учесть, что этот модуль носит ознакомительный характер, то можно начинать сразу изучать Модуль №2 «Теоретическая часть». Он – большой, потому освоение должно быть постепенным. Изначально изучается раздел, который связан с применением геометрического смысла модуля в процессе решения простейших уравнений, неравенств. Теоремы модуля числа должны получить особое внимание, ведь эта информация – довольно значимая, она носит доказательный характер. Два дня будет отведено на изучение соответствующего материала. Тут будут даны ответы на контрольные вопросы с выбором правильного ответа. Еще день отводится на изучение раздела «Универсальный метод решения неравенств и уравнений с модулем». После раздела отвечаем на вопросы с формулировкой: «Какие из приведенных суждений являются верными?». Многие из перечисленных вопросов могут встречаться на ОГЭ в модуле «Алгебра». Правильный ответ оценивается в 0,5 балла.

Как только перечисленные разделы будут изучены, можно приступать к решению задач базового уровня сложности – Модуль №4. На данном уровне каждая задача оценивается в 1 балл. Модуль успешно пройден, если ученик набирает 23-25 баллов. Это приравнивается к оценке «5». В случае, если ученик набирает 19-22 балла, то оценка составит «4», а уровень считается – менее освоенным. 15-18 баллов – ученик получает «3». И если набрано менее 15 баллов, то необходимо опять изучить теоретическую часть.

Как только задания начального уровня не будут вызывать проблем, возвращаемся к Модулю №2. Многие ученики находят достаточное количество полезной информации в данном разделе. Следовательно, на его изучение отводится 2 дня. Если все проходит успешно, то переходим сразу на Модуль №5 «Тренировочные задачи среднего уровня сложности». Здесь имеется 15 задач. За правильное решение ученик получает 3 балла. Итак, максимальное количество баллов по модулю – 45. Минимальное количество баллов, которое говорит о том, что ученик успешно освоил модуль, составляет 27 баллов или 9 правильно решенных задач. Получается, что:

- 27-33 балла – «3»;
- 24-40 баллов «4»;
- 41-45 балл – «5».

Оценка переводится в пятибалльную шкалу для самоконтроля. Если ученик набирает менее 27 баллов, получает «2», то нужно вернуться к изучению теории.

Одаренные ученики или те дети, которые хотят испробовать собственные умственные возможности, могут приступать к Модулю №6 «Тренировочные задания повышенного уровня сложности». Предусмотрено 10 задач, за каждую правильную задачу можно получить 5 баллов. Если выполнить 8 задач правильно, то это говорит о хорошем уровне знаний по теме «Решение уравнений и неравенств с модулем». 10 правильных решений задач говорит о максимальной степени освоения темы.

По трем модулям: минимальный балл, который говорит об успешном выполнении задания – 72. Максимальный балл – 104-120.

Чтобы освоить электронный образовательный курс, в среднем отводится 1 неделя. Но это касается только тех учащихся девятых классов, которые освоили темы, нужные для решения ряда задач среднего и повышенного уровня сложности. Важно учитывать уровень знаний учеников, в какой классе будет проходиться курс.

По итогам выполнения магистерской работы на сайте http://ipsilon-dev.sgu.ru/ публикуются следующие материалы:

- контрольные вопросы по теории с выбором ответа;
- теория по теме «Решение уравнений и неравенств с модулем»;
- комплекс тренировочных заданий 3х уровней сложности.

Модуль

Модуль числа *a* или абсолютная величина числа *a* равна а, если а больше или равно нулю и равна -*a*, если *a* меньше нуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \ a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Из определения следует, что для любого действительного числа *a*, $|a| \geq 0$.

Ещё один важный факт: модуль никогда не бывает отрицательным. Какое бы число не было взято — положительное или отрицательное — его модуль всегда оказывается положительным (или в крайнем случае нулём). Именно поэтому модуль часто называют абсолютной величиной числа [15].

Кроме того, если объединить определение модуля для положительного и отрицательного числа, то получим глобальное определение модуля для всех чисел. А именно: модуль числа равен самому этому числу, если число положительное (или ноль), либо равен противоположному числу, если число отрицательное.

Ещё есть модуль нуля, но он всегда равен нулю. Кроме того, ноль — единственное число, которое не имеет противоположного.

Таким образом, если рассмотреть функцию $|y = x|$ и попробовать нарисовать её график, то получится следующий рисунок (рис. 1):

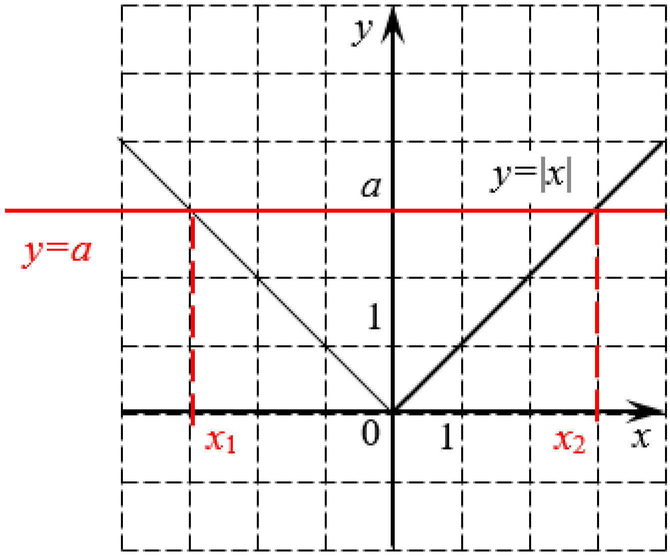

Рисунок 1 - График модуля и пример решения уравнения

Из рисунка 1 сразу видно, что |−m|=|m|, а график модуля никогда не опускается ниже оси абсцисс. Но это ещё не всё: красной линией отмечена прямая y=a, которая при положительных *a* даёт нам сразу два корня: x1 их2.

Помимо чисто алгебраического определения, есть геометрическое. Допустим, есть две точки на числовой прямой: x1 и x2. В этом случае выражение $|x1-x2|$ - это просто расстояние между указанными точками. Или, если угодно, длина отрезка, соединяющего эти точки (рис. 2):

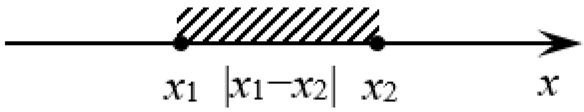

Рисунок 2 - Длина отрезка, соединяющая точки x1 и x2

Модуль - это расстояние между точками на числовой прямой. Из этого определения также следует, что модуль всегда неотрицателен.

Использование геометрического смысла модуля при решении простейших уравнений и неравенств

Понятие модуля, или абсолютного значения действительного числа допускает несколько подходов. Мы начнем с геометрического истолкования этого понятия.

Как известно, каждое действительное число можно отождествить с точкой на числовой прямой. Поскольку про каждую отличную от нуля точку можно сказать, лежит она левее нуля или правее, а также измерить расстояние от этой точки до нуля, мы можем связать с каждым действительным числом две величины: его знак и его модуль. А именно, если точка, изображающая число a, лежит левее нуля, то говорят, что знак числа a отрицателен, а если правее нуля, то говорят, что знак числа a положителен; число *0* знака не имеет. Модуль числа a, равный расстоянию от точки, изображающей число a, до нуля можно измерить для всех действительных чисел. Например, число *3* положительно, а его модуль равен *3*, число -*5* отрицательно, а его модуль равен *5* (рис. 3); модуль нуля равен нулю. Как мы видим, модуль положительного числа равен самому этому числу. Модуль отрицательного числа равен "минус" - этому числу, то есть противоположному числу. Таким образом, каждое действительно число a можно записать в виде a= знакaмодульa. Более точно, вводятся две функции действительного аргумента x, называемые знаком и модулем: $\operatorname{sgn} x$ и $|x|$ соответственно (*signum* - знак (*лат.*)). По определению полагают:

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, если.a > 0 \\ 0, если.a = 0 \\ -1, если.a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} a, если.a \geq 0 \\ -a, если.a < 0 \end{cases}$$

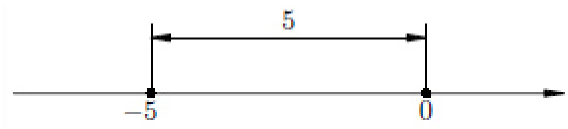

Рисунок 3 - Геометрический смысл выражения $|-5| = 5$

Рассмотрим простейшее уравнение $|x| = 3$. Мы видим, что на числовой прямой есть две точки, расстояние от которых до нуля равно трём. Это точки 3 и -3. Значит, у уравнения $|x| = 3$есть два решения: х = 3 и х = -3.

Далее, рассмотрим несколько примеров использования геометрического смысла модуля при решении простейших уравнений и неравенств.

Пример 1.

$$|x - 3| = 4$$

Это уравнение можно прочитать так: расстояние от точки х до точки 3 равно 4. С помощью графического метода можно определить, что уравнение имеет два решения: -1 и 7 (см. рис. 4).

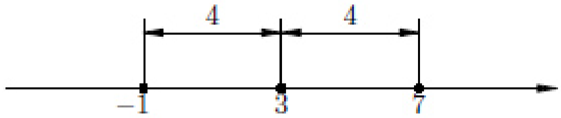

Рисунок 4 - Геометрический смысл уравнения |x - 3| = 4

Пример 2.

Решим неравенство: $|x + 7| \prec 4$

Можно прочитать как: расстояние от точки x до точки -7 меньше четырёх. Ответ: $(-11; -3)$ (см. рис. 5).

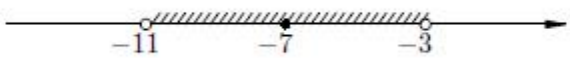

Рисунок 5 - Геометрический смысл неравенства $|x + 7| \prec 4$

Пример 3.

Решим неравенство: $|10 - x| \geq 7$

Расстояние от точки 10 до точки x больше или равно семи. Ответ: $(-\infty; 3] \cup [17; +\infty)$ (см. рис. 6).

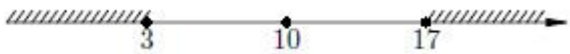

Рисунок 6 - Геометрический смысл неравенства $|10-x| \geq 7$

График функции $y=|x|$ (рис. 7).

Для x$\geq$ 0 имеем y = x. Для x < 0 имеем y = -x.

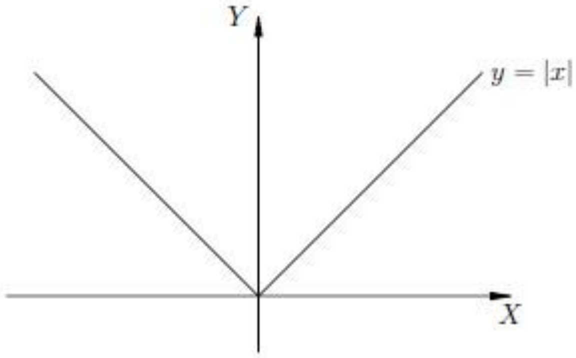

Рисунок 7 - График функции $y=|x|$

При решении задач, содержащих модуль вещественного числа, основным приемом является раскрытие знака модуля в соответствии с его свойствами.

Таким образом, если под знаком модуля стоит выражение, зависящее от переменной, мы раскрываем модуль по определению:

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, если. 2x-5 \geq 0 \\ 5-2x, если. 2x-5 \prec 0 \end{cases}$$

В некоторых случаях модуль раскрывается однозначно. Например: $|x^2+y^2| = x^2+y^2$, так как выражение под знаком модуля неотрицательно при любых *x* и *y*. Или $|-z^2-1| = z^2+1$, так как выражением под модулем не положительно при любых *z*.

Теоремы о модулях

В настоящем параграфе нами будут рассмотрены теоремы об экстремумах функций, содержащих сумму линейных выражений под знаками абсолютных величин, позволяющие эффективно решать задачи как на нахождение экстремумов подобных функции, так и решать задачи с параметрами.

Теорема 1.1Абсолютная величина действительного числа $a \neq 0$ равна большему из двух чисел a или $-a$ [14].

1. Если число a положительно, то $-a$ отрицательно, т. е. $-a < 0 < a$. Отсюда следует, что $-a < a$.

В этом случае $|a| = a$, т. е. $|a|$ совпадает с большим из двух чисел a и $-a$.

2. Если a отрицательно, тогда $-a$ положительно и $a < -a$, т. е. большим числом является $-a$. По определению, в этом случае, $|a| = -a$ - снова, равно большему из двух чисел $-a$ и a.

Следствие 1. 2Из теоремы следует, что $|-a| = |a|$.

В самом деле, как $|-a|$, так и $|a|$ равны большему из чисел $-a$ и a, а значит, равны между собой.

Следствие 2.**3**Для любого действительного числа a справедливы неравенства $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$.

Умножая второе равенство $-a \leq |a|$ на -1 (при этом знак неравенства изменится на противоположный), мы получим следующие неравенства: $a \leq |a|$, $a \geq -a$ справедливые для любого действительного числа a. Объединяя последние два неравенства в одно, получаем: $-|a| \leq a \leq |a|$.

Теорема 2.**4**Абсолютная величина любого действительного числа a равна арифметическому квадратному корню из a^2: $|a| = \sqrt{a^2}$ [14].

В самом деле, если $a \geq 0$, то, по определению модуля числа, будем иметь $|a| = a$. С другой стороны, при $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$, значит $|a| = \sqrt{a^2}$.

Если $a < 0$, тогда $|a| = -a$ и $\sqrt{a^2} = -a$ и в этом случае $|a| = \sqrt{a^2}$.

Эта теорема дает возможность при решении некоторых задач заменять $|a|$ на $\sqrt{a^2}$.

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число a, до начала отсчета.

Если $a \neq 0$, то на координатной прямой существует две точки a и $-a$, равноудаленной от нуля, модули которых равны.

Если $a = 0$, то на координатной прямой $|a|$ изображается точкой 0.

Теорема 3. 5Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных величин тогда и только тогда, когда каждая величина имеет тот знак, с которым она входит в алгебраическую сумму [14].

6 Далее, решим уравнение, используя теорему 3.

$$|x^2-1|+|x^2-5x+6|=5x-7.$$

Решение.Так как $5x-7=(x^2-1)-(x^2-5x+6)$, то мы имеем равенство вида $|m_1|+|m_2|=\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2$, где $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0, \\ -(x^2-5x+6)\geq 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x^2-1\geq 0, \\ x^2-5x+6\geq 0 \end{cases} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \begin{cases} x\leq -1 x\geq 1, \\ 2\leq x\leq 3 \end{cases} \Leftarrow 2\leq x\leq 3.$$

Ответ. $2\leq x\leq 3$.

Теорема 4.**7**Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных величин тогда и только тогда, когда все величины имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо все величины имеют противоположный знак одновременно.

Решим уравнение, используя теорему 4.

$$2|x-4|+|3-x|-|1+2x|+5|x-2|=0.$$

Решение."Загоняем" коэффициенты 2 и 5 под знак модуля и "изолируем" сумму модулей:

$$|2x-8|+|3-x|+|5x-10|=|1+2x|.$$

По константам получаем $-(-8)+3+(-10)=1$. Действительно, $(2x-8)+(3-x)+(5x-10)=(1+2x)x$, то есть уравнение имеет вид $|m_1|+|m_2|+|m_3|=|m_1+m_2+m_3|$. Следовательно, уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2x-8\le 0, \\ 3-x\ge 0, \\ 5x-10\ge 0 \end{cases} \text{ è } \begin{cases} 2x-8\ge 0, \\ 3-x\le 0, \\ 5x-10\le 0, \end{cases}$$

то есть $2\le x\le 3$.

Ответ. $2\le x\le 3$.

Далее, сформулируем утверждение, позволяющее строить график алгебраической суммы модулей, не раскрывая модули (это особенно удобно, когда модулей много).

Теорема 5.**8**Алгебраическая сумма модулейn линейных выражений представляет собой кусочно-линейную, график которой состоит из $n+1$ прямолинейного участка. Поэтому график может быть построен по $n+2$ точкам, n из которых представляют собой корни внутримодульных выражений, ещё одна - произвольная точка, с абсциссой меньше наименьшего из этих корней, и последняя - с абсциссой, большей наибольшего из этих корней [10].

Замечание. Аналогично можно строить графики вида $y = ax+b+c_1\,|\,x-x_1\,|+c_2\,|\,x-x_2\,|+\ldots+c_n\,|\,x-x_n\,|$.

Примеры построения графиков.

1. $f(x)=|x-1|$. Вычисляем значения функции в точках 1, 0 и 2, получаем график, состоящий из двух лучей (рис. 8).

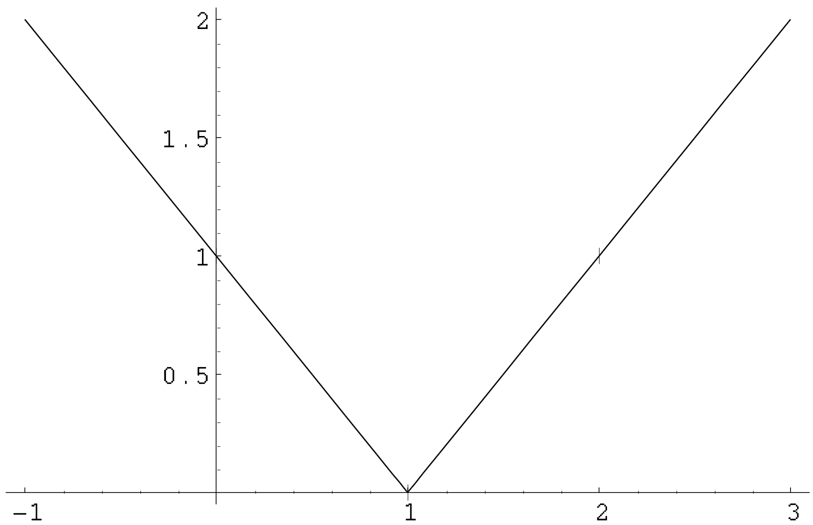

Рисунок 8 - Графический смысл выражения $f(x)=|x-1|$

2. $f(x)=|x-1|+|x-2|$. Вычисляя значение функции в точках с абсциссами 1, 2, 0 и 3, получаем график, состоящий из отрезка и двух лучей (см. рис. 9).

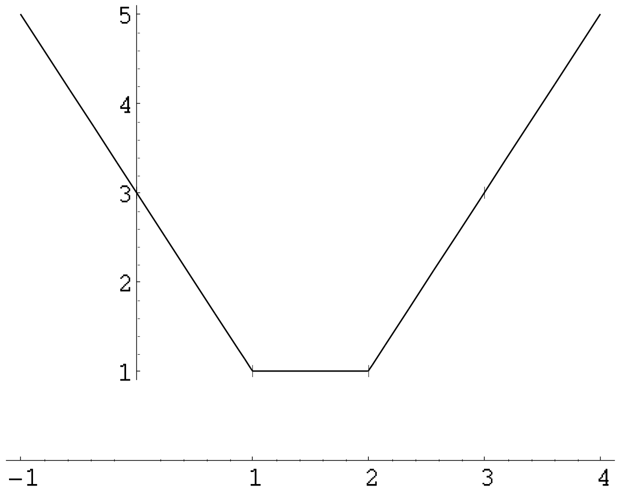

Рисунок 9 - Графический смысл выражения $f(x)=|x-1|+|x-2|$

3. $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$. Для построения графика "по отрезкам" вычислим значение функции в точках 1, 2, 3, 0, 4 (см. рис. 10).

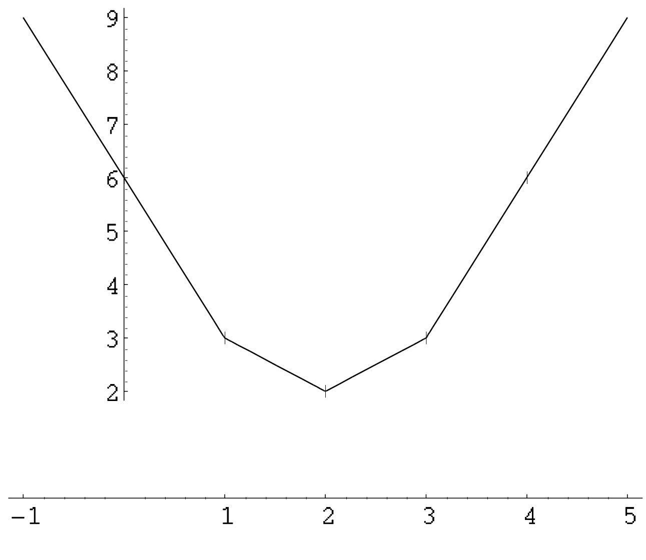

Рисунок 10 - Графический смысл выражения $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-3|$

4. $f(x)=|x-1|-|x-2|$. График разности модулей строиться аналогично (см. рис. 11).

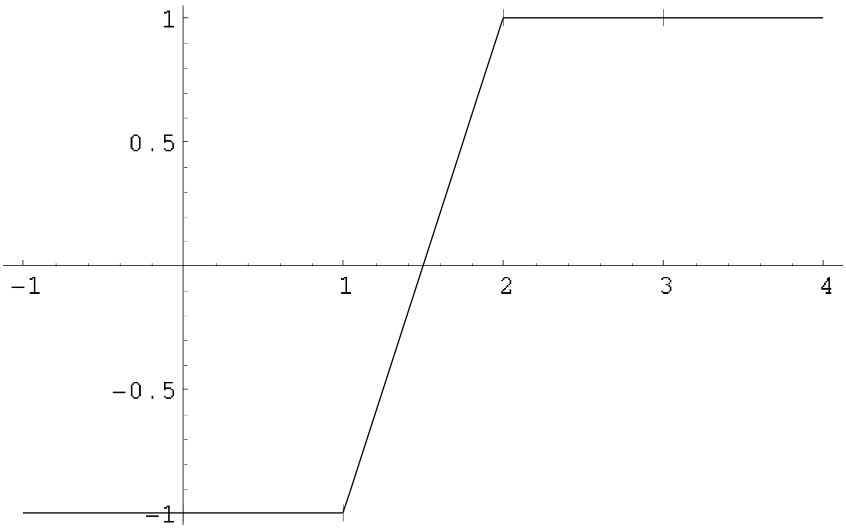

Рисунок 11 - Графический смысл выражения $f(x) = |x-1| - |x-2|$

Анализируя вид графиков, можно предположить, а затем и доказать, что сумма модулей линейных выражений вида $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$ достигает своего наименьшего значения либо в единственной точке, если число модулей нечетно, либо во всех точках некоторого отрезка, если число модулей чётно. График суммы нечетного числа модулей линейных выражений имеет форму клина, а график суммы чётного числа модулей имеет участок параллельный оси абсцисс. Более точно:

Теорема 6.9Пусть корни подмодульных выражений упорядочены по возрастанию $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n$. Тогда если число слагаемых n нечётно и $n = 2k+1$, то наименьшее значение функции f достигается в точке x_k, а если число слагаемых n чётно и $n = 2k$, то наименьшее значение функции достигается во всех точках отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ [9].

Пример.**10**В зависимости от значения параметра a, найти количество корней уравнения:

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2000| = a.$$

Решение.Решим задачу графически. Пусть $f(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2000|$, определим количество точек пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = a$ в зависимости от a. Исходя из сформулированного выше утверждения, график функции f будет иметь участок, параллельный оси абсцисс. Заметим, что абсциссы точек этого участка составляют отрезок $[1000;1001]$, и во всех его точках функция достигает наименьшего значения, равного, например, $f(1000)$, причем

$$f(1000) = 999 + 998 + \ldots + 1 + 0 + 1 + \ldots + 998 + 999 + 1000.$$

Поскольку указанная сумма представляет собой удвоенную арифметическую прогрессию с первым членом 1, последним членом 999, сложенную с числом 1000, то она равна

$$f(x) = 2\frac{1+999}{2}999 + 1000 = 10^6.$$

Тогда при $a < 10^6$ уравнение не будет иметь решений, при $a = 10^6$ их будет бесконечно много, а при $a > 10^6$ уравнение будет иметь два решения.

Далее, сформулируем теорему, удобную при решении неравенств, относительно произведений или частных разности модулей.

Теорема 7.11Знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности квадратов этих выражений.

Пример. 12Решить неравенство:

$$\frac{|x^3 + x - 1| - |x^3 - x + 1|}{|x-1| - |x+1|} \geq 0.$$

Решение.Воспользуемся теоремой:

$$\frac{|x^3 + x - 1| - |x^3 - x + 1|}{|x-1| - |x+1|} \geq 0 \Leftarrow \frac{(x^3 + x - 1)^2 - (x^3 - x + 1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2} \geq 0.$$

Используя формулу разности квадратов, разложим числитель и знаменатель на множители и решим полученное рациональное неравенство.

$$\frac{(2x-2)(2x^3)}{-2(2x)} \geq 0 \Leftarrow x^2(x-1) \leq 0,\ x \neq 0 \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 0 < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;0) \cup (0;1]$

Далее рассмотрим решение уравнений методом интервалов. Применение метода интервалов основано на следующей теореме.

Теорема 8. 13Функция, непрерывная на промежутке и необращающаяся на нем в нуль, сохраняет на этом промежутке свой знак.

Это означает, что нули функции и границы промежутков ее непрерывности разделяют область определения функции на участки, где она сохраняет постоянный знак. Применение метода поясним на примере.

Пример. 14Решим неравенство:

$$||x^3+x+1|-\sqrt{x}|>x^3-x-\sqrt{x}-1.$$

Пусть $f(x)=||x^3+x+1|-\sqrt{x}|-(x^3-x-\sqrt{x}-1)$. Областью определения данной функции есть $[0;+\infty)$. Решая уравнение, получим, что функция $f(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении переменной. Это означает, что на всей области определения функция является знакопостоянной. Вычисляя, например, $f(0)=2$, получаем, что функция принимает только положительные значения.

Ответ. $[0;+\infty)$.

Метод интервалов позволяет решать более сложные уравнения и неравенства с модулями, но в этом случае он имеет несколько иное назначение. Суть состоит в слудующем. Находим корни всех подмодульных выражений и разбиваем числовую ось на промежутки знакопостоянства этих выражений. Это позволяет, последовательно перебирая эти промежутки, одновременно избавляться от всех модулей и решать обычное уравнение или неравенство (проверяя при этом, что найденный ответ входит в данный промежуток).

Универсальный метод решения уравнений и неравенств с модулем

Наиболее универсальными и применимыми к наибольшему количеству задач мы считаем метод раскрытия модулей. Это убеждение возникло в результате решения большого числа задач из контрольно-измерительных материалов ЕГЭ, предметных чемпионатов, олимпиадных задач, а также изучение литературы по данному вопросу.

Далее, рассмотрим метод раскрытия модулей более подробно.

Пример.Решить уравнение:

$$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9.$$

Решение.Это уравнение содержит более одного модуля.

Метод решения уравнений, содержащих переменные под знаком двух и более модулей, состоит в следующем:

1. Найти значения переменной, при которых каждый из модулей обращается в нуль: $x-2=0$, $x_1=2$; $x-3=0$, $x_2=3$; $2x-8=0$, $x_3=4$.

2. Отметить эти точки на числовой прямой.

3. Рассматриваем уравнение на каждом из промежутков и устанавливаем знак выражений, которые находятся под модулями.

1) При $x\le 2$ или $x\in(-\infty;2]$. Чтобы определить знак каждого из выражений под модулем на этом промежутке, достаточно взять любое значение x из этого промежутка и подставить в выражение. Если полученное значение отрицательно, значит, при всех x из этого промежутка выражение будет отрицательным; если полученное числовое значение положительно, значит, при всех значениях x из этого промежутка выражение будет положительным.

Возьмем значение $x=0$ из промежутка $(-\infty;2]$ и подставим его значение в выражение $x-2$, получаем $0-2=-2<0$, значит на этом промежутке $x-2$ отрицательно, а следовательно ``выйдет" из под модуля со знаком "минус", получим: $-(x-2)$.

При этом значении x, выражение $x-3$ получит значение $0-3=-3<0$, значит, оно на промежутке $(-\infty;2]$ также принимает отрицательные значения и "выйдет" из модуля со знаком "минус", получим: $-(x-3)$.

Выражение $2x-8$ получит значение $2\cdot 0-8=-8<0$ и «выйдет» из под модуля со знаком "минус": $-(2x-8)$.

Уравнение на этом промежутке получится таким: $-(x-2)-(x-3)-(2x-8)=9$, решая его, находим: $x=1$.

Выясняем, входит ли это значение в промежуток $(-\infty;2]$. Оказывается входит, значит $x=1$ является корнем уравнения.

2) При $x\in(2;3]$. Выбираем любое значение x из этого промежутка. Пусть $x=2{,}5$. Определяем знак каждого из выражений под модулем при этом значении x. Оказывается, что выражение $x-2$ положительно, а два других отрицательны.

Уравнение на этом промежутке примет вид: $x-2-(x-3)-(2x-8)=9$. Решая его, находим $x=0$. Это значение не входит в промежуток $(2;3]$, а значит, не является корнем уравнения.

3) При $x\in(3;4]$. Выбираем произвольное значение x из этого промежутка, скажем, $3{,}5$ и подставляем в каждое из выражений. Находим, что выражения $x-2$ и $x-3$ положительны, а $2x-8$ - отрицательно. Получим следующее уравнение: $x-2+x-3-(2x-8)=9$.

После преобразования, получим: $3=9$, а значит, уравнение не имеет корней на этом промежутке.

4) При $x\in(4;+\infty)$. Нетрудно установить, что все выражения на этом промежутке положительны, а значит получим уравнение: $x-2+x-3+2x-8=9$, $4x=22$, $x=5{,}5$ которое входит в промежуток и является корнем уравнения.

Ответ. $x=1$, $x=5{,}5$.

Также очень важным мы считаем знание и применение тождества $\sqrt{a^2}=|a|$, так как оно используется не только при решении уравнений и неравенств, но и для преобразования многих выражений с радикалами. Остальные методы решения, которые мы рассмотрели, безусловно, представляют большой интерес в плане расширения математического кругозора и общего математического развития.

Отметим также, что теоремы о модулях нами рассмотрены для возможности решения задач и уравнений более сложного уровня.

Заключение

В данном дистанционном проекте реализована тема «Решение уравнений и неравенств с модулем».

В основу образовательного процесса при дистанционном обучении положена целенаправленная и контролируемая интенсивная самостоятельная работа обучаемого, который мог бы учиться в удобном для себя месте, по индивидуальному расписанию, имея при себе комплект специальных средств обучения и согласованную возможность контакта с преподавателем в процессе обучения.

К достоинствам дистанционного обучения можно отнести:

Для обучаемого:

1) гибкость графика обучения;
2) возможность учиться по индивидуальному плану согласно собственным потребностям и возможностям;
3) объективная и независимая от преподавателя методика оценки знаний;
4) возможность консультироваться с преподавателем в ходе обучения;
5) относительная дешевизна.

Для преподавателей такая форма обучения, прежде всего, означает появление дополнительной возможности подачи материала обучающимся, т.е. фактически появляется возможность при той же нагрузке обучать большее количество людей.

Неудивительно, что, при всех своих очевидных достоинствах, дистанционная форма обучения быстро завоевала огромную популярность в образовательном мире. Электронное обучение сегодня - это учебный процесс, в котором используются интерактивные электронные средства доставки информации: компакт-диски, Internet.

Помимо решения своей первоочередной задачи - обучения на расстоянии посредством Интернет – электронное обучение также является отличным дополнением очной формы обучения и может служить хорошим подспорьем для повышения качества и эффективности традиционного обучения.

В целом, основными достоинствами ЭО являются:

1) Большая свобода доступа - учащийся имеет возможность доступа через Интернет к электронным курсам из любого места, где есть выход в глобальную информационную сеть.
2) Компетентное, качественное образование - курсы создаются при участии целой команды специалистов, что делает ЭО зрелым и качественным обучением.
3) Более низкие цены на доставку обучения - в электронном обучении процесс доставки образования включает в себя только обмен информацией через Интернет без затрат со стороны учащегося на покупку учебно-методической литературы.
4) Возможность разделения содержания электронного курса на модули - небольшие блоки информации позволяют сделать изучение предмета более гибким и упрощают поиск нужных материалов.
5) Гибкость обучения - продолжительность и последовательность изучения материалов слушатель выбирает сам, полностью адаптируя весь процесс обучения под свои возможности и потребности.
6) Возможность обучения на рабочем месте - учащиеся имеют возможность получать образование без отрыва от работы (при наличии таковой), а также дома, в пути с использованием мобильного Интернета.

7) Возможность развиваться в ногу со временем - пользователи электронных курсов: и преподаватели, и учащиеся развивают свои навыки и знания в соответствии с новейшими современными технологиями и стандартами. Электронные курсы также позволяют своевременно и оперативно обновлять учебные материалы.
8) Возможность определять критерии оценки знаний - в электронном обучении имеется возможность выставлять четкие критерии, по которым оцениваются знания, полученные учащимися в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Решение уравнений и неравенств с модулем» был апробирован в средней общеобразовательной школе, в результате чего реализованы следующие задачи:

— изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме, новизна и значимость данного материала для подготовки к текущему контролю и экзаменам;
— определены методические особенности данной темы, методику её преподавания каждый учитель подбирает для себя самостоятельно, учитывая способности учащихся;
— разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности;
— расширен кругозор учащихся, ограниченный информацией учебника.

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели. Теоретический часть включает в себя материал, который отсутствует в школьных учебниках. А изучение темы «Решение уравнений и неравенств с модулем» является важным на любом этапе школьного обучения, так как на данной информации базируются другие разделы алгебры.