МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций
и стохастического анализа

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКИЙ

АВТОРЕФЕРАТ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

аспиранта 4 года обучения
специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ»
механико-математического факультета
Миронова Вячеслава Александровича

Научный руководитель
проф., д.ф.-м.н. ____________________ П.А. Терехин
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
зав.каф., д.ф.-м.н. ____________________ С.П. Сидоров
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов – 2019 год

Введение

Актуальность темы. Хорошо известно, что классическая система Уолша обладает базисными свойствами в пространствах $L^p, 1 < p < \infty$. По сравнению с классической системой Хаара, система Уолша состоит из равноизмеримых функций, принимающих значения -1 и 1 на всем единичном отрезке и, таким образом, в отличие от функций Хаара, функции Уолша не локализованы. Кроме того, функции Уолша образуют систему характеров двоичной группы. Эти обстоятельства определяют интерес к изучению систем Уолша как с точки зрения теории функций и функционального анализа, так и с точки зрения практических приложений в теории сигналов, задачах обработки и передачи информации и др.

Система, получившая название системы Уолша, была определена им в 1923 году. Она составляет фундамент двоичного гармонического анализа, которому посвящены монографии Б.И. Голубова, А.В. Ефимова, В.А. Скворцова F. Shipp, W.R. Wade, P. Simon.

Исследованию различных свойств системы Уолша посвящены работы Б.И. Голубова, В.А. Скворцова, Л.А. Балашова, В.А. Скворцова, Л.А. Балашова, А.И. Рубинштейна, А.И. Рубинштейна, N.J. Fine, F. Schipp , F. Moricz, F. Shipp, Wade W.R. и многих других авторов.

Дальнейшим логическим шагом на пути данного исследования является построение некоторых обобщений классической системы Уолша. В качестве примера подобных обобщений можно привести исследования B. Granados: для $F(t)$ — комплекснозначных периодических функций с периодом 1 ей была рассмотрена система функций $\{F_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, которую она предложила называть всплеском Уолша и определила при помощи равенств $F_0(t) = F(t)$ и $F_n(t) = w_n(t)F(2^{k+1}t)$ при натуральном $n = 2^k, \ldots, 2^{k+1} - 1$ ($k =$

$0, 1, \dots$), где $\{w_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — классическая система Уолша в нумерации Пэли.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются некоторые обобщения классической системы Уолша, а именно, так называемые аффинные системы функций типа Уолша, введенные в работе П.А. Терехина. [1]

Цели и задачи. Целью данной работы является исследование фундаментальных свойств аффинных систем типа Уолша: минимальности, полноты, бесселевости, базисности.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи: при каких условиях на порождающую функцию f аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является минимальной системой, полной системой, бесселевой системой, базисом в пространствах $L_p, 1 \le p < \infty$?

Методы исследования. Основным методом исследования аффинных систем функций типа Уолша служит понятие операторной структуры мультисдвига в гильбертовом пространстве, тесно связанное с операторной генерацией аффинных систем Уолша. Конечно, при рассмотрении основного вопроса не только в пространстве L^2, но и в пространствах L^p, мы вынуждены использовать наряду со структурой мультисдвига Уолша также и другие подходы: в частности, современные методы теории функций и приближений, связанные с построением явных аппроксимативных агрегатов, с использованием функции Пэли и определяемых ею пространств Пэли, с применением операторного подхода и интерполяции оператора, с использованием диадического пространства Харди H_d^1 с атомарными разложениями.

Структура ВКР. Настоящая работа состоит из введения, четырех

[1]Терехин П.А. Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 4, ч. 1. С. 395–400.

глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **81** страницу текста. Список литературы содержит **40** наименований.

В **<u>главе I</u>** на основе понятия мультисдвига вводится понятие аффинной системы Уолша, порождённой функцией $f \in L_0^2$, получены соотношения для построения в явном виде системы, биортогонально сопряжённой к системе Уолша; доказана минимальность и полнота полученной системы.

В **<u>главе II</u>** мы исследуем фундаментальный вопрос о полноте аффинных систем в пространствах Лебега L^p. Мы разбираем два случая. Во-первых, частный случай аффинной системы типа Уолша, порожденной $\frac{1}{2}$-антипериодической функцией, т.е. всплеска Уолша в терминологии Б. Гранадос, рассмотренный сперва для пространства L^2, а затем и для более общего случая L^p. Далее идет общий случай 1-периодической порождающей функции с нулевым интегральным средним.

В **<u>главе III</u>** были получены условия бесселевости для аффинной системы типа Уолша. В параграфе 3.1 были получены условия бесселевости для аффинной системы типа Уолша в пространстве L^2: на основе степенно-логарифмической шкалы с применением простых спектров Уолша были получены условия на коэффициенты разложения Фурье-Уолша, гарантирующие бесселевость аффинной системы.

<u>Глава IV</u> посвящена изучению базисных свойств аффинных систем функций типа Уолша. Был найден ряд условий базисности по Риссу аффинных систем типа Уолша, сформулированных в терминах функции, дуальной к порождающей. Была доказана базисность по Риссу для аффинной системы, порождённой тригонометрической функцией, а затем были найдены условия, при которых данный результат можно распространить на случай тригонометрического полинома.

Основные результаты

В **<u>главе I</u>** на основе понятия мультисдвига вводится понятие аффинной системы Уолша, порождённой функцией $f \in L_0^2$, получены соотношения для построения в явном виде системы, биортогонально сопряжённой к системе Уолша; доказана минимальность и полнота полученной системы.

Определение 1. *Пусть H – гильбертово пространство и $W_0, W_1 : H \to H$ – изометрические операторы, действующие в пространстве H. Будем говорить, что пара изометрий W_0 и W_1 определяет структуру мультисдвига, если существует вектор $e \in H$ такой, что семейство*

$$W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} e, \qquad \alpha_\nu \in \{0,1\}, \quad 0 \le \nu \le k-1, \qquad k \ge 0,$$

образует ортонормированный базис пространства H.

Для 1-периодичных функций с нулевым интегральным средним из гильбертова пространства $f \in L_0^2(0,1)$ зададим структуру мультисдвига:

$$W_0 f(x) = f(2x), \qquad W_1 f(x) = r(x) f(2x),$$

Пусть $r_k(t) = w(2^k t)$, $k = 0, 1, \dots,$ – система Радемахера;$n = 2^k + \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu$ – двоичное разложение натурального числа n, дающее натуральную биекцию между множеством натуральных чисел и множеством конечных двоичных последовательностей, которой будем пользоваться для замены индекса $x_\alpha = x(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) = x_n$.

Для каждого набора $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ полагаем операторное произведение

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}$$

(при $k = 0$ пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I).

Пусть, далее, $r_k(t) = w(2^k t)$, $k = 0, 1, \ldots,$ – система Радемахера.

Для любой функции $f \in L_0^2$ будем иметь

$$f_n(t) = f_\alpha(t) := W^\alpha f(t) = W_{\alpha_0} \ldots W_{\alpha_{k-1}} f(t) = f(2^k t) w^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1}t) \ldots w^{\alpha_0}(t)$$
$$= f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t).$$

Определение 2. *Семейство функций* $\{W^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ *назовем аффинной системой функций типа Уолша, порожденной функцией* $f \in L_0^2$.

Определение 3. *Система* $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ *называется биортогонально сопряжённой к аффинной системе* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$*, если:*

$$(f_i, f_j^*) = \int_0^1 f_i(t) f_j^*(t)\, dt = \delta_{ij}, \qquad i, j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n w_n.$ – ряд Фурье-Уолша по аффинной системе произвольной функции $f \in L_0^2$. Тогда в предположении, что f нормирована условием $x_1 = (f, w) = 1$ по числовой последовательности коэффициентов разложения $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ построим новую числовую последовательность: примем $y_1 = 1$, а $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ определим с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\sum_{\alpha = \beta\gamma} x_\beta y_\gamma = \sum_{\nu=0}^{k} x(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\nu-1}) y(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_{k-1}) = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{A}, |\alpha| = k \geq 1$$

Теорема 1. *Семейство функций*

$$f_n^* = f_\alpha^* = \sum_{\alpha = \beta\gamma} y_\gamma w_\beta = \sum_{\nu=0}^{k} y(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_{k-1}) w(\alpha_0, \ldots, \alpha_{\nu-1}) \qquad (2)$$

является биортогонально сопряженной системой к аффинной системе функций типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Представление (2) показывает, что функции f_n^* биортогонально сопряженной системы суть полиномы порядка n по системе Уолша.

Теорема 2. *Биортогонально сопряженная система* $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является полной в пространстве* $L^p(0,1)$.

Аффинная система типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является минимальной для любой ненулевой порождающей функции f, однако, явный вид биортогонально сопряженной системы будет отличаться от приведенного выше для случая $\hat{f}_1 = 1$.

Кроме того, стоит отметить, что совпадение систем $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ происходит в том и только том случае, когда порождающая функция f совпадает с функцией Уолша w с точностью до унимодулярной постоянной. Поэтому аффинная система функций типа Уолша является полной ортонормированной системой тогда и только тогда, когда $f = \varkappa w$, $|\varkappa| = 1$. Тем не менее, класс неполных ортонормированных аффинных систем типа Уолша достаточно широк.

В **главе II** мы исследуем фундаментальный вопрос о полноте аффинных систем в пространствах Лебега L^p. Мы разбираем два случая. Во-первых, частный случай аффинной системы типа Уолша, порожденной $\frac{1}{2}$-антипериодической функцией, т.е. всплеска Уолша в терминологии Б. Гранадос, рассмотренный сперва для пространства L^2, а затем и для более общего случая L^p. Далее идет общий случай 1-периодической порождающей функции с нулевым интегральным средним.

В параграфе 2.1 рассматривается вопрос: при выполнении каких условий на порождающую функцию $f(x)$ аффинная система типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L^2(0,1)$?

Всюду внутри параграфа полагаем, что функция $f \in L_0^2(0,1)$ нормирована условием

$$(f,r)=\int_0^{1/2} f(x)\,dx-\int_{1/2}^1 f(x)\,dx=1.$$

Рассмотрим ряд Фурье-Уолша функции f:

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}_n w_n=w+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\hat{f}_\alpha w_\alpha,$$

где $\hat{f}_n=\hat{f}_\alpha=(f,w_n)=(f,w_\alpha)$ – коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, причем $(f,w_0)=0$ и $(f,w_1)=1$.

Теорема 3. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{|\alpha|=k}|\hat{f}_\alpha|^2\right)^{1/2}\le 1,$$

то аффинная система функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является полной.*

Для частного случая, когда порождающая функция представляет собой сумму по пачкам, критерий полноты будет выглядеть следующим образом:

Теорема 4. Пусть $f=w+\sum_{|\alpha|=k}\widehat{f}_\alpha w_\alpha$ при фиксированном $k\ge 1$. Тогда условие

$$F=\sum_{|\alpha|=k}|\hat{f}_\alpha|^2\le 1$$

является необходимым и достаточным для полноты аффинной системы $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

В параграфе 2.2 мы обобщаем результат на случай пространства L_p, $1<p<\infty$, в котором система Уолша образует базис.

Для каждой функции F рассмотрим оператор T_F, переводящий функции системы Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в функции аффинной системы типа Уолша $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$T_F w_n=F_n,\qquad n=0,1,\dots,$$

и продолженный по линейности на многообразие всех полиномов Уолша. Заметим, что оператор T_F, вообще говоря, не является ограниченным.

Теорема 5. *Пусть функция $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, имеет вид $f = r - F$, где $(F, r) = 0$.*

Пусть, далее, оператор T_F действует в пространстве L^p и при этом его степени равномерно ограничены:

$$C := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_F^n\|_{L^p \to L^p} < \infty.$$

Тогда аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в L^p.

В параграфе 2.3 показано, что аффинная система типа Уолша $\{W^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ является переполненной (переопределенной) в том случае, когда порождающая функция f имеет ненулевое среднее значение. В параграфе 2.4 изучены аппроксимативные свойства аффинных систем, т.е. возможности приближения функций в L^p-метрике посредством специальных приближающих агрегатов.

В **главе III** были получены условия бесселевости для аффинной системы типа Уолша. В параграфе 3.1 были получены условия бесселевости для аффинной системы типа Уолша в пространстве L^2: на основе степенно-логарифмической шкалы с применением простых спектров Уолша были получены условия на коэффициенты разложения Фурье-Уолша, гарантирующие бесселевость аффинной системы.

Определение 4. *Будем говорить, что система функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L^2$ является системой Бесселя, если существует постоянная $B > 0$ такая, что для любой функции $g \in L^2(\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f_n, g)|^2 \leq B\|g\|_{L^2}^2.$$

Рассмотрим $f \in L_0^2$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n$ – разложение функции f в ряд Фурье-Уолша. Будем искать условия на коэффициенты, гарантирующие бесселевость системы с использованием степенной логарифмической шкалы:

$$|c_n| = O\left(\frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n+1)}\right).$$

Теорема 6. *Если*

$$|c_n| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\log^{1+\varepsilon} n}\right), \varepsilon > 0$$

тогда $\{f_n\}$ *– система Бесселя.*

Также существует функция $f \in L^2$ *такая, что*

$$|c_n| \approx \frac{1}{\sqrt{n}\log n},$$

$\{f_n\}$ *– не является системой Бесселя.*

Рассмотрим функции малого спектра. Пусть $S_f\{f : (f, W_n) \neq 0\}$, $|d_k|$ – плотность спектра:

Рассмотрим следующие случаи:

$$|d_k| = \{n \in [2^k; 2^{k+1}) : (f, w_n) \neq 0\} \qquad |d_k| = \ 0, 1, \ldots, 2^k$$

В таком случае, введённое ранее условие на коэффициенты Фурье-Уолша примет следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^{1/2} \cdot \frac{1}{2^{\alpha k} \cdot k^\beta} < \infty$$

Для теоремы 6 в разрезе условий на спектр функции был рассмотрен ряд частных случаев и оформлен как следствия из основной теоремы:

Следствие 1. *Пусть* $|d_k|$ *ограничено, т.е.* $|d_k| \leq C$*. Тогда система* $\{f_n\}$ *является бесселевой при* $\alpha = 0, \beta > 1$*.*

Следствие 2. *Пусть* $|d_k| = O(k^\gamma), \gamma > 0$ *Тогда условие на коэффициенты Фурье-Уолша принимает вид:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\gamma/2}}{2^{\alpha k} \cdot k^\beta} < \infty$$

и система $\{f_n\}$ *является бесселевой при* $\alpha = 0, \beta > \frac{\gamma}{2} + 1$.

Следствие 3. *Пусть* $|d_k| = O(2^{\gamma k}), 0 < \gamma < 1$ *Тогда условие на коэффициенты Фурье-Уолша принимает вид:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\gamma \cdot k}}{2^{\alpha k} \cdot k^\beta} < \infty,$$

и система $\{f_n\}$ *является бесселевой при* $\beta = 0, \frac{\gamma}{2} < \alpha$.

В параграфе 3.2, основываясь на понятии мультисдвига в гильбертовом пространстве, спектральной теории и сходимости по мере, был получен контрпример небесселевой аффинной системы, порождённой непрерывной 1- периодичной функцией; было доказано, что аффинные системы, порождённые любой липшицевой функцией, являются бесселевыми.

Известны примеры таких классов систем функций, для которых одно лишь условие $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty \subset L^\infty(\Omega)$, $\|u_n\|_\infty \leq A\|u_n\|_2$, $n = 0, 1, \ldots$, гарантирует их бесселевость. С другой стороны, последнее условие в ряде случаев является необходимым условием бесселевости или базисности по Риссу.

Теорема 7. *Существует непрерывная периодическая функция* $u(x)$, *порождающая аффинную систему типа Уолша* $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$, *которая не является системой Бесселя в пространстве* $L^2(0, 1)$.

Пример 1 (Пример Никишина). *Система* $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$ *называется системой сходимости по мере для* ℓ^2, *если ряд* $\sum_{n=0}^\infty a_n u_n(x)$ *сходится по мере всякий раз, как только* $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in \ell^2$. *Е. М. Никишин построил пример функции* $u \in L_0^2(0, 1) \cap C[0, 1]$ *для которой система функций*

$\{u(2^k x)\}_{k=0}^{\infty}$ *не является системой сходимости по мере для* ℓ^2*. При этом была указана функция* $f \in L^2(0,1)$ *такая, что* $\sum_{k=0}^{\infty} |\int_0^1 f(x)u(2^k x)\,dx|^2 = \infty$*. Таким образом,* $\{u(2^k x)\}_{k=0}^{\infty}$ *не является системой Бесселя в пространстве* $L^2(0,1)$*.*

Теорема 8. *Пусть периодическая функция* $u(x)$ *удовлетворяет условию Липшица* $|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^{\alpha}$*,* $0 < \alpha \le 1$*. Тогда аффинная система функций типа Уолша* $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является системой Бесселя в пространстве* $L^2(0,1)$*.*

Глава IV посвящена изучению базисных свойств аффинных систем типа Уолша.

В параграфе 4.1 был указан ряд условий базисности по Риссу аффинных систем типа Уолша, сформулированных в терминах функции, дуальной к порождающей.

Определение 5. *Дуальной функцией к порождающей функции* f *аффинной системы типа Уолша* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *будем называть формальный ряд по системе Уолша*

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} d_\alpha w_\alpha,$$

где последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ *коэффициентов формального ряда, определяющего дуальную функцию* g *связана с последовательностью* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *коэффициентов ряда Фурье-Хаара порождающей функции* f *соответствующими рекуррентными соотношениями.*

Теорема 9. *Для того, чтобы аффинная система типа Уолша* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы обе аффинные системы типа Уолша* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$*, порожденные исходной функцией* f *и дуальной к ней функцией* g*, были системами Бесселя.*

В параграфе 4.2 была доказана базисность по Риссу для аффинной системы, порождённой тригонометрической функцией, а затем были найдены условия, при которых данный результат можно распространить на случай тригонометрического полинома.

Определение 6. *Функцией Пэли функции $x(t)$ называется следующая функция:*

$$Px(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \xi^2(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Определение 7. *Пространством $P(L_p), 1 < p < \infty$ будем обозначать пространство функций x таких, что $Px \in L_p$ с нормой*

$$||x||_{P(L^p)} := ||Px||_{L^p}.$$

Пространство $P(L_p)$ будем называть пространством Пэли.

Для случая тригонометрического полинома был получен следующий результат:

Теорема 10. *Пусть*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sin(2^{k+1}\pi t),$$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

— соответствующий алгебраический полином с теми же коэффициентами.

Если $P_n(z)$ не имеет нулей в замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$, то аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, порожденная функцией f, образует базис пространства L^p при $1 < p \leq 2$.

Замечание 1. *Аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, порожденная функцией $f \in L^2$, образует базис пространства L^2 тогда и только тогда,* *когда $P_n(z)$ не имеет нулей в замкнутом единичном круге $|z| \leq 1$.*

Замечание 2. В работе Б.С. Митягина [2] был изучен ряд базисных свойств систем сжатых функций.

Пусть $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — нечетная 2π-периодическая функция.Тогда $D_f := \{f(nt)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сжатых функций. Для аффинной системы функций типа Уолша W_f, порожденной функцией $f(2\pi t)$, подсистема $D_f^{(2)} := \{f(2^k t)\}_{k=0}^{\infty}$ системы D_f на $[0, \pi]$ соответствует подсистеме системы W_f на $[0, 1]$, но при этом, вообще говоря, системы D_f и W_f имеют различные базисные свойства. Тем не менее, в следующем частном случае, когда функция f имеет специальный вид

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \sin(2^k t),$$

условия базисности в пространстве L^2 систем сжатых функций и аффинных систем типа Уолша совпадают.

[2] Митягин Б.С., Системы сжатых функций: полнота, минимальность, базисность // Функц. анализ и его прил., 51:3 (2017), С. 94–97.

Заключение

В настоящей работе выполнено исследование аффинных систем функций типа Уолша. Получены условия на порождающую функцию, а в ряде случаев, критерии, при которых аффинная система типа Уолша является минимальной системой, полной системой, бесселевой системой, базисом. Приведённые утверждения снабжены рядом примеров.

Перечислим основные результаты работы:

- получены рекуррентные соотношения для построения в явном виде системы, биортогонально сопряженной к аффинной системе типа Уолша; показана минимальность и полнота полученной системы;
- получены условия на порождающую функцию, при которых аффинные системы типа Уолша полны в $L^p, 1 < p < \infty$;
- показано, что при определённых условиях аффинная система является переполненной (переопределённой);
- получены условия на коэффициенты разложения Фурье-Уолша, гарантирующие бесселевость аффинной системы;
- построен контрпример, демонстрирующий невозможность полного отказа от каких-либо дополнительных условий для класса аффинных систем;
- доказано, что аффинные системы, порождённые любой липшицевой функцией, являются бесселевыми;
- получены условия базисности по Риссу для аффинной системы типа Уолша, порождённой тригонометрическим полиномом.

Список публикаций автора

1. *Mironov V.A., Sarsenbi A.M., Terekhin P.A.* Affine Bessel sequences and Nikishin's example // Filomat. 2017. V. 31. № 4. P. 963–966.
2. *Аль-Джоурани Х.Х.Х., Миронов В.А., Терехин П.А.* Аффинные системы функций типа Уолша // Известия Саратовского Университета. Серия Математика. Механика. Информатика. Т. 16, вып. 3. Саратов, 2016. с. 247-256.
3. *Миронов В.А., Терехин П.А.* Минимальность аффинных систем функций типа Уолша // Математика. Механика. Саратов, 2014. Сб. научн. трудов, вып.16. С. 42-44.
4. *Миронов В.А., Терехин П.А.* Тригонометрическая аффинная система функций типа Уолша // Математика. Механика. Саратов, 2015. Сб. научн. трудов, вып. 17.

Две первые работы опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.