МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Численное решение интегральных уравнений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика
код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Зашакуева Тимура Аликовича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель доцент, к.ф.-м.н., доцент		М.Ю. Игнатьев
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия
Зав. кафедрой д.ф.-м.н, профессор		В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Систематическое изучение интегральных уравнений началось только в конце 19-го века. Ранние работы в этой области связаны с именами Ж.Фурье, Н.Абеля,К.Неймана,Ж.Лиувилля. Позднее В.Вольтерра и Э.Фредгольм от частных примеров на обращение интегральных преобразований пришли к более общим выводам, которые легли в основу современной теории интегральных уравнений . Дальнейшее изучение было проделано Ф.Риссом и Ю.Шаудером, которые распространили теорию Фредгольма на вполне непрерывные операторы. В начале 20-го века новые результаты были получены Д.Гильбертом и Э.Шмидтом для уравнений с симметрическими ядрами. Далее идеи Д.Гильберта были развиты в работах Т.Карлемана, Ф.Рисса, К.Неймана, а также советских ученых Гохберга И.Ц, Крейна М.Г.В теории сингулярных уравнений значительные результаты были получены Д.Гильбертом, Ж.Пуанкаре, Э.Нетер и развиты в трудах советских математиков С.М.Никольским, С.Г.Михлиным,Н.И Мусхелишвили,Ф.Д Гаховым. В теории нелинейных интегральных уравнений можно упомянуть работы Красносельского М.А, Вайнберга М.М,Забрейко П.П, П.С Урысона, А.А.Ляпунова, А.Гаммерштейна.

Многие физические задачи, которые обычно решаются с помощью дифференциальных уравнений, могут быть решены более эффективно с помощью методов интегральных уравнений. Одной из причин, по которой лучше использовать методы интегральных уравнений является тот факт , что начальные или краевые условия дифференциальных уравнений можно записать под одним знаком интеграла. В случае дифференциальных уравнений в частных производных размерность задачи при этом уменьшается, к примеру, если имеется краевая задача для уравнения математической физики с двумя независимыми переменными, то в процессе преобразования этой задачи к интегральному виду, задача становится одномерной, то есть искомая функция будет зависеть только от одной переменной. Этот прием эффективно работает при решении многомерных задач математической физики.

В данной работе демонстрируется наличие неустойчивости в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода при дискретизации без использования так называемых регуляризаторов. В первых главах(гл.1-3) даны теоретические сведения о видах интегральных уравнений,приведены основные теоремы теории Фредгольма, а также обоснованы численные методы решения уравнений 2-го рода.Исследована сходимость приближенного решения к точному решению, а также доказана единственность приближенного решения. Оценена погрешность приближенных решений для метода квадратур и метода последовательных приближений. Во второй части работы(гл.4) приводится обоснование метода А.Н. Тихонова регуляризации интегрального уравнения первого рода, дан критерий однозначной разрешимости этого уравнения в случае замкнутого симметричного ядра Далее решается задача дискретизации уравнения первого рода по указанному методу для последующего решения на ЭВМ, затем проводится численный эксперимент по решению дискретной задачи и подбор параметра регуляризации.

Основная часть. Однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

Теорема 1.

1.Собственные значения ядра $K(t, s)$ вещественны.

2.Нахождение комплексных собственных функций сводится к нахождению вещественных собственных функций.

Теорема 2.

1.Существует конечная или бесконечная последовательность линейно-независимых собственных функций и соответствующих собственных значений ядра $K(t, s)$.
2.Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям,ортогональны.Ранг любого собственного значения конечен. Всю систему собственных функций можно ортонормировать, так чтобы были выполнены соотношения:

$$\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_m(t)dt = 0, (i \neq m), \int_a^b {\varphi_i}^2(t)dt = 1, \tag{0.1}$$

3.Каково бы ни было $L > 0$, может существовать лишь конечное число собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| < L$.Если все число собственных значений бесконечно и их расположить в порядке возрастания абсолютной величины:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n| \ldots,, \tag{0.2}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.
Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода
Теорема 3.
Пусть ядро $K(t, s)$ удовлетворяет требованиям теоремы, приведенной выше.Тогда если λ не совпадает ни с одним собственным значением ядра $K(s, t)$, то решение интегрального уравнения существует, единственно и представимо в виде:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s, \lambda)f(s)ds, \tag{0.3}$$

$$R(t, s, \lambda) = K(t, s) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(t)\varphi_m(s)}{\lambda_m(\lambda_m - \lambda)} \tag{0.4}$$

Если $\lambda = \lambda_n$, где λ_n - некоторое собственное значение ядра и функция $f(t)$ ортогональна всем собственным функциям, соответствующим λ_n, то решение уравнения существует, не является единственным и представимо в виде:

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{i=1}^{p} C_i\varphi_{n_i} + \lambda \sum_{m=1, m\neq n_1\ldots n_p}^{\infty} \frac{f_m\varphi_m(s)}{\lambda_m - \lambda}, \tag{0.5}$$

где C_i - некоторые константы. Если $\lambda = \lambda_n$ и $f(t)$ не ортогональная хотя бы одной собственной функции $\varphi_{n_i}(t)$, то решения не существует.
Численные методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.
Найдем приближенное решение уравнения методом квадратур.Построим на отрезке $[a, b]$ сетку с узлами $x_1, x_2 \ldots, x_n$. Запишем уравнение в узлах сетки:

$$\varphi(t_i) - \lambda \int_a^b K(t_i, s)\varphi(s)ds = f(t_i), \tag{0.6}$$

Аппроксимируем интегралы в равенствах конечными суммами с помощью одной из квадратурных формул:

$$\varphi_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij}\varphi_j = f_i, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{0.7}$$

Здесь $\varphi_i = \varphi(\tilde{t_i})$,$f_i = f(t_i)$,$K_{ij} = K(t_i, t_j)$,$\tilde{\varphi}$ - приближение к искомой функции φ,A_j - веса квадратурной формулы. Решение системы уравнений дает приближенные значения искомой функции в узлах t_i. По ним с помощью интерполяции можно построить приближенное

решение интегрального уравнения на всем отрезке $[a, b]$.
Сходимость метода квадратур.
Для доказательства осуществимости предложенного алгоритма необходимо показать, что система (0.7) однозначно разрешима при достаточно больших n и что последовательность функций $\varphi_n(t)$ сходится по норме к решению уравнения при $n \to \infty$. Запишем уравнение в операторной форме

$$\varphi - A\varphi = f, \tag{0.8}$$

где через A обозначен линейный ограниченный оператор на пространстве функций $C[a, b]$:

$$(A\varphi)(t) = \int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds \tag{0.9}$$

Введем в рассмотрение линейный ограниченный оператор A_n:

$$(A_n\varphi)(t) = \sum_{j=1}^{n} L_j^{(n)} K(t, s_j^{(n)})\varphi(s_j^{(n)}) \tag{0.10}$$

и исследуем вопрос о разрешимости уравнения

$$\varphi_n - K_n\varphi_n = f, \tag{0.11}$$

Теорема 4.Существует такое целое $N_1 > 0$, что при всех $n \geq N_1$ выполнено

$$||(I - K_n)^{-1}||_C \leq c_1, \tag{0.12}$$

где постоянная c_1 не зависит от выбора n.
Теорема 5.Существует такое целое $N_2 > 0$, что при всех $n \geq N_2$ решение φ_n уравнения

$$\varphi_n + K_n\varphi_n = f \tag{0.13}$$

существует и единственно, причем выполнена оценка

$$||\varphi - \varphi_n||_C \leq const \cdot n^{-m} \tag{0.14}$$

где φ является решением уравнения, а постоянная не зависит от выбора n.
Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds + f(x), \tag{0.15}$$

где $K(x, s)$ и $f(x)$ – непрерывные функции при $a \leq s \leq x \leq b$.
Теорема 6.
Уравнение (0.15) имеет единственное непрерывное решение при любом значении λ.Это решение может быть найдено путем последовательных приближений. Доказательство:Докажем существование решения.Для этого рассмотрим последовательность функций, определяемых рекуррентым соотношением

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y_n(s)ds + f(x), \tag{0.16}$$

Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Основные сведения
Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds = f(t), \tag{0.17}$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ – известные функции, $\varphi(t)$ – искомая функция, представляет трудности для изучения, существенно отличные от встречавшихся в интегральных уравнениях 2-го рода. Пусть, например, ядро $K(t,s)$ есть многочлен относительно t и s

$$K(t,s) = a_0(s)t^m + a_1(s)t^{m-1} + \cdots + a_m(s), \tag{0.18}$$

где $a_i(s)$ - многочлены относительно s $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда левая часть (0.17) будет иметь вид

$$b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m$$

для любой $\varphi(t) \in C[a,b]$, а следовательно, такой же вид должна иметь и правая часть (0.17), т.е функция $f(t)$. Таким образом, для любой непрерывной функции $f(t)$ решение уравнения (0.17), вообще говоря, не существует при сколь угодно "хорошем"ядре $K(s,t)$. Рассмотрим, например, простейшее интегральное уравнение 1-го рода

$$\int_0^1 \varphi(s)ds = t \tag{0.19}$$

с ядром $K(t,s) \equiv 1$ и $f(t) = t$.

Очевидно, что в классе интегрируемых функций это уравнение не имеет решений. Пусть ядро $K(t,s)$ уравнения (0.17) симметричное. В силу теоремы Гильберта-Шмидта для существования решения (0.17) необходимо, чтобы функция $f(t)$ разлагалсь по собственным функциям $\varphi_i(t)$ ядра $K(s,t)$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i(t). \tag{0.20}$$

При выполнении этого условия решение $\varphi(t)$ уравнения (0.17) можно искать в виде

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(t). \tag{0.21}$$

Подставляя (0.21) в (0.17) и сравнивая с (0.20), получим $\frac{c_i}{\lambda_i} = (f, \varphi_i)$, откуда $c_i = \lambda_i(f, \varphi_i)$. Если мы хотим, чтобы решение $\varphi(t)$ принадлежало $L_2[a,b]$, надо наложить на $f(t)$ дополнительное требование.

Теорема 7.

Интегральное уравнение 1-го рода с замкнутым симметричным ядром $K(s,t)$

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds = f(t), \tag{0.22}$$

где $f(t) \in L_2[a,b]$ имеет единственное решение в классе $L_2[a,b]$ тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} {\lambda_k}^2 {f_k}^2 \tag{0.23}$$

сходится.

Здесь λ_k – характеристические числа ядра $K(s,t)$, $f_k = (f, \varphi_k)$ – коэффициенты Фурье функции $f(t)$ относительно собственных функций $\varphi_n(t)$ этого ядра

$$\varphi_n(t) = \lambda_n \int_a^b K(s,t)\varphi_n(s)ds. \tag{0.24}$$

Симметричное ядро $K(s,t)$ называется замкнутым в $L_2[a,b]$, если каждая функция $\omega(t) \in L_2[a,b]$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_a^b K(s,t)\omega(s)ds = 0, \tag{0.25}$$

равна нулю почти всюду на $[a,b]$. Замкнутое ядро характеризуется тем, что собственные функции ядра образуют полную в $L_2[a,b]$ ортогональную систему функций.
Сглаживающий функционал и его свойства.
Рассмотрим операторное уравнение $A\varphi = f$, где A - оператор Фредгольма, $f(t)$ - вещественная функция, определенная на интервале $t \in [c,d]$,$\varphi(t)$ опредлена при $t \in [a,b]$, а ядро $K(s,t)$ - в прямоугольнике $t \in [c,d]$,$s \in [a,b]$.Введем в рассмотрение также функционал

$$M^\alpha[\varphi, f] = N[\varphi, f] + \alpha\Omega[\varphi], \tag{0.26}$$

где

$$N[\varphi, f] = \int_c^d (A\varphi - f)^2 dt \tag{0.27}$$

$$\Omega[\varphi] = \int_a^b [(\varphi')^2 + \varphi^2] \tag{0.28}$$

Здесь $\alpha > 0$ - некоторый параметр, называемый параметром регуляризации. Функционал (0.26) называется регуляризующим, а функционал $M^\alpha[\varphi, f]$ - сглаживающим функционалом.Исследуем свойства этого функционала.Поставим вариационную задачу на экстремум функционала $M^\alpha[\varphi, f]$.Экстремум будем искать в классе Y функций $\varphi(t)$, дважды непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих условиям:

$$\varphi^{'}(a) = \varphi^{'}(b) = 0, \tag{0.29}$$

Пусть $\varphi(t)$ и $\varphi(t) + \delta\varphi(t)$- две функции, принадлежащие Y. Вычислим приращение функционала M^α,отвечающее приращению $\delta\varphi(t)$, т.е величину $M^\alpha[\varphi + \delta\varphi, f] - M^\alpha[\varphi, f]$.Имеем:

$$M^\alpha[\varphi + \delta\varphi, f] = \int_c^d [A(\varphi + \delta\varphi) - f]^2 dt + \alpha \int_a^b [(\varphi^{'} + \delta\varphi^{'})^2 + (\varphi + \delta\varphi)^2] dt = \tag{0.30}$$

$$= \int_c^d (A\varphi - f)^2 dt + 2\int_c^d (A\varphi - f)A\delta\varphi dt + \int_c^d (A\delta\varphi)^2 dt + \tag{0.31}$$

$$+\alpha \int_a^b [(\varphi^{'})^2 + (\varphi)^2] dt + 2\alpha \int_a^b (\varphi^{'}\delta\varphi^{'} + \varphi\delta\varphi) dt + \int_a^b [(\delta\varphi^{'})^2 + \delta\varphi^2] dt, \tag{0.32}$$

В этом выражении сумма первого и четвертого слагаемых представляет собой $M^\alpha[\varphi, f]$.Перенесем их влево и тогда получим, что приращение функционала $M^\alpha[\varphi + \varphi\delta, f] - M^\alpha[\varphi, f]$ распадается на линейную относительно $\delta\varphi$ часть (это сумма второго и пятого слагаемых),называемую вариацией функционала и обозначаемую δM^α,и сумму третьего и шестого слагаемых, зависящую от $\delta\varphi$ нелинейно,которую обозначим $R[\delta\varphi]$ и которая при любом $\delta\varphi(t)$ неотрицательна:

$$M^\alpha[\varphi + \varphi\delta, f] - M^\alpha[\varphi, f] = \delta M^\alpha + R[\delta\varphi], \tag{0.33}$$

Из вариационного исчисления известно, что если $\varphi(t)$ реализует экстремум функционала M^α, то $\delta M^\alpha = 0$ т.е:

$$\int_c^d (A\varphi - f)A\delta\varphi dt + \alpha \int_a^b (\varphi^{'}\delta\varphi^{'} + \varphi\delta\varphi) dt, \tag{0.34}$$

Это равенство представляет собой необходимое условие экстремума.Преобразуем первое слагаемое, изменив порядок интегрирования:

$$\int_c^d [\int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds - f(t)] \int_a^b K(s,x)\delta\varphi(x)dxdt = \tag{0.35}$$

$$= \int_a^b \delta\varphi(x)dx \int_c^d [\int_a^b K(s,t)K(s,x)\varphi(s)ds]dt - \tag{0.36}$$

$$- \int_a^b \delta\varphi(x)[\int_a^b K(\hat{t},s)\varphi(s)ds - f(\hat{t})]dx \tag{0.37}$$

где

$$K(\hat{t},x) = \int_d^c K(t,s)K(x,t)dxf(\hat{t}) = \int_c^d K(x,t)f(x)dx, \tag{0.38}$$

Во втором слагаемом в (0.34) произведем интегрирование по частям. Получим:

$$\int_a^b (\varphi^{'}\delta\varphi)dx = \varphi^{'}\delta\varphi\Big|_a^b + \int_a^b (\varphi - \varphi^{''})\delta\varphi dx = = \int_a^b (\varphi - \varphi^{''}\delta\varphi dx), \tag{0.39}$$

так как внеинтегральный член в силу (0.29) обращается в нуль.Соотношение (0.34) принимает вид:

$$\int_a^b \delta\varphi(t)\int_a^b \hat{K}(s,t)\varphi(s)ds - \bar{f}(t) + \alpha(\varphi - \varphi^{''})dt = 0, \tag{0.40}$$

Поскольку $\delta\varphi(t)$-произвольная вариация, то, в силу основной леммы вариационного исчислени, выражение в фигурных скобках равно нулю.Получаем уравнение, определяющее экстремали функционала:

$$\varphi^{''}(t) - \varphi(t) = \frac{1}{\alpha}(\int_a^b \hat{K}(s,t)\varphi(s)ds - \bar{f}(t)), \tag{0.41}$$

Таким образом, если $\varphi(x) \in Y$ осуществляет экстремум функционала M^{α} при условиях (0.29), то φ удовлетворяет уравнению (0.41). Покажем, что уравнение (0.41) при краевых условиях (0.29) имеет единственное решение.Сведем эту задачу к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Рассмотрим уравнение:

$$\varphi^{''} - \varphi = 0, \tag{0.42}$$

при условиях (0.29).Убедимся, что эта задача имеет только тривиальное решение.Действительно, пусть $\varphi(t)$ имеет положительное максимальное значение, достигающееся в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$.Тогда $\varphi(t_0) > 0, \varphi^{'}(t_0) = 0$ $\varphi^{''}(t_0) \le 0$. Далее получаем противоречие равенству (0.42),т.к при $t = t0$ следует, что $\varphi^{''} - \varphi = 0$.Следовательно, $sup_{[a,b]}\varphi(t) \le 0$. Аналогично доказывается, что $inf_{[a,b]}\varphi(t) \ge 0$. Отсюда следует, что $\varphi(t) \equiv 0$. В силу доказанного существует функция Грина $G(t,\xi)$ и уравнение (0.41) при условиях (0.29) эквивалетно интегральному уравнению:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\int_a^b G(t,\xi)[\int_a^b \hat{K}(s,\xi)\varphi(s)ds - \hat{f}(\xi)]d\xi \tag{0.43}$$

или

$$\varphi(t) = \int_a^b T(t,s)\varphi(s)ds - F(t) \tag{0.44}$$

где

$$T(t,s) = \frac{1}{\alpha}\int_a^b G(t,\xi)\hat{K}(s,\xi)d\xi, \tag{0.45}$$

– некоторое ядро, а

$$F(t) = \frac{1}{\alpha}\int_a^b G(t,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \qquad (0.46)$$

Уравнение (0.45) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Докажем, что оно имеет единственное решение. Для этого, согласно теореме о решении неоднородного интегрального уравнения, достаточно доказать, соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение.А это эквивалентно тому, что однородное уравнение (0.41) при условиях (0.29) имеет только тривиальное решение.Допустим противное,т.е что уравнение

$$\alpha(\varphi'' - \varphi) = \int_a^b \hat{K}(s,t)\varphi(s)ds, \qquad (0.47)$$

имеет нетривиальное решение. Умножая (0.47) на $\varphi(t)$ и интегрируя, получим

$$\alpha\int_a^b(\varphi\varphi'' - \varphi^2)dt = \int_a^b \varphi(t)dt\int_a^b \hat{K}(s,t)\varphi(s)ds, \qquad (0.48)$$

Интегрированием по частям преобразуем левую часть к виду $-\alpha\int_a^b(\varphi\varphi'' - \varphi^2)dt$.Правую часть преобразуем,пользуясь выражением (0.40) и изменяя порядок интегрирования:

$$\int_a^b \varphi(t)dt\int_a^b \varphi(s)ds\int_d^c K(x,s)K(x,t)dx = \qquad (0.49)$$

$$= \int_c^d dx\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = \qquad (0.50)$$

$$= \int_d^c dx[\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt]^2 \qquad (0.51)$$

После этих преобразований (0.48) принимает вид

$$-\alpha\int_a^b[(\varphi'')^2 + \varphi^2]dt = \int_c^d dx[\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt]^2 \qquad (0.52)$$

Так как $\varphi(t)\equiv 0$, то левая часть отрицательна, а правая неотрицательна, и мы имеем противоречие, доказывающее, что задача (0.47), (0.29) имеет только тривиальное решение, а следовательно, задача (0.41),(0.29) имеет единственное решение. Это решение реализует минимальное значение функционала $M^\alpha[\varphi, f]$.Это непосредственно следует из (0.33).

Определение 1.Последовательность $\varphi_n \in Y$ называется компактной в Y, если из каждого бесконечного подмножества ее элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность к некоторому элементу $\varphi \in Y$

Определение 2.Последовательность $\varphi_n \in Y$ называется сходящейся в метрике пространства Y к некоторому элементу $\varphi \in Y$, если $\rho_Y(\varphi_n, \varphi) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение 3.Оператор A, переводящий элемент $\varphi \in Y$ в элемент $f \in F$, называется непрерывным, если какова бы ни была последовательность φ_n,сходящаяся в Y к φ, соответствующая последовательность $f_n = A\varphi_n$, сходится в F к $f = A\varphi$.

Теорема 1.Пусть в пространстве Y имеется последовательность φ_n, которой в пространстве F отвечает последовательность $f_n = A\varphi_n$.Пусть $f_n \to f \in F$,A является непрерывным оператором, а последовательность φ_n является компактной.Тогда $\varphi_n \to \varphi = A^{-1}f$.

Доказательство: от противного. Пусть $\varphi_n \not\to \varphi = A^{-1}f$.Тогда найдется $\varepsilon > 0$ и такая подпоследовательность φ_{n_k}, для которой справедливо неравенство

$$\rho_Y(\varphi_{n_k}, \varphi) > \varepsilon, \qquad (0.53)$$

в то время как подпоследовательность $f_{n_k} \to f_n$.Но последовательность φ_n является компактной и поэтому из φ_{n_k} можно выбрать еще одну подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\overline{\varphi} \in Y$.Перенумеруем и обозначим эту подпоследовательность через φ_n. Имеем

$$\varphi_n \to \overline{\varphi}, \tag{0.54}$$

В силу непрерывности оператора A получим тогда $f_n = A\varphi_n \to A\overline{\varphi} = \overline{f}$, т.е $\overline{f} = f$. Отсюда в силу однозначности обратного оператора, получим $\overline{\varphi} = \varphi$.Тогда (0.54) означает, что $\varphi_n \to \varphi$ т.е

$$\rho_Y(\varphi_n, \varphi) < \varepsilon/2 \tag{0.55}$$

при $n > N(\varepsilon)$.Но согласно (0.53)

$$\rho_Y(\varphi_n, \varphi) > \varepsilon \tag{0.56}$$

для $\forall n$.Полученное противоречие доказывает теорему. Будем считать, что решение задачи (0.17) существует при некоторой фиксированной функции $f(x)$,и обозначим его $\varphi(x)$.Ядро $K(x, s)$ будем считать непрерывным и замкнутым , что обеспечивает единственность решения. Построим последовательность функций, позволяющую получить с любой степенью точности решение$\varphi(x)$ некорректной задачи (0.17) по приближенно заданной функции $f(x)$. Приближенное задание функции $f(x)$ будем понимать как задание последовательности $g_n(x)$ непрерывных на $[c, d]$ функций таких, что $\int_c^d [f(x) - g_n(x)]^2 dx \leq \delta_n^2$, где $\delta_n \to 0$ - некоторая числовая последовательность.Таким образом, $g_n(x)$ аппроксимируют $f(x)$ в смысле среднего квадратичного. Алгоритм построения приближенного решения состоит в выборе некоторой числовой последовательности $\alpha_n = \gamma(\delta_n)^2$, где γ-не зависящая от n постоянная, и для каждого α_n находится функция $\varphi_n^\alpha(x)$, реализующая минимальное значение сглаживающего функционала через $M_n^\alpha[\varphi, g_n]$.

Теорема 2.Пусть $\varphi(x)$ - решение уравнения (0.17).Пусть $g_n(x)$- последовательность непрерывных функций, являющихся приближениями для $f(x)$ так, что

$$\int_c^d [f(x) - g_n(x)]^2 dx \leq \delta_n^2 \tag{0.57}$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.Пусть функция $\varphi_n^\alpha(x)$ реализует минимальное значение сглаживающего функционала $M_n^\alpha[\varphi, g_n]$,где $\alpha_n = \gamma\delta_n^2$.Тогда для $\forall\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$sup_{[a,b]}|\varphi(x) - \varphi_\alpha^n(x)| < \varepsilon \tag{0.58}$$

Воспользуемся теоремой.Рассмотрим два конкретных пространства Y и F.В пространстве F, элементами которого являются непрерывные на $[c, d]$ функции, определим расстояние следующим образом:

$$\rho_F(f_1, f_2) = \sqrt{\int_c^d [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx} \tag{0.59}$$

то есть

$$\rho_F(f_1, f_2) = ||f_1 - f_2|| \tag{0.60}$$

где $|| \cdot ||$ - норма введенная в пространстве $h[c, d]$, рассмотренном раннее.В пространстве Y, элементами которого также являются непрерывные на $[a, b]$ функции, расстояние определим как

$$\rho_Y(\varphi_1, \varphi_2) = sup_{[a,b]}|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \tag{0.61}$$

Построим последовательность φ_n^α,указанную в формулировке теоремы.Ей соответствует последовательность $f_n = A\varphi_n$.Поскольку ядро K замкнуто, то отображение последовательность φ_n на f_n взаимно-однозначно.Чтобы делать заключение о том, что $\rho_Y(\varphi, \varphi_n) \to 0$ при $n \to \infty$, надо убедиться, что:

1)Оператор A является непрерывным в смысле определения, данного выше.

2)$f_n \to f$, то есть $\rho_F(f_n, f) \to 0$.

3)Последовательность φ_n компактна

Убедимся в справедливости (1).Действительно, пусть последовательность φ_n сходится к φ в метрике пространства Y,т.е сходится равномерно.Тогда φ_n сходится к φ и в среднем.Такую последовательность φ_n оператор Фредгольма A с непрерывным ядром $K(t, s)$ переводит в последовательность $A\varphi_n$, сходящуюся в метрике пространства F к $A\varphi$.Это означает непрерывность оператора A, осуществляющего отображение элементов метрического пространства Y на элементы метрического пространства F.Для того, чтобы убедиться в справедливости (2) и (3), докажем два вспомогательных неравенств.Поскольку φ_n реализует минимальное значение функционала то

$$M_n^\alpha[\varphi_n, g_n] \leq M_n^\alpha[\varphi,_n] \tag{0.62}$$

где φ есть решение уравнения(0.32),т.е

$$N[\varphi_n, g_n] + \alpha_n\omega[\varphi_n] \leq N[\varphi, g_n] + \alpha_n\omega[\varphi] = \tag{0.63}$$

$$= \int_d^c (A\varphi - g_n)^2 dt + \alpha_n\omega[\varphi] = \int_c^d (f - g_n)^2 dt + \alpha_n C \leq \tag{0.64}$$

$$\leq \delta_n^2 + \alpha_n C \leq (\frac{1}{\gamma} + C)\alpha_n \tag{0.65}$$

где $C > 0$- постоянная, равная $\alpha_n\omega[\varphi n]$.Итак,

$$N[\varphi_n, g_n] + \alpha_n\omega[\varphi_n] \leq (\frac{1}{\gamma} + C)\alpha_n = \alpha_n D \tag{0.66}$$

Поскольку оба функционала в левой части не отрицательны, то каждый из них в отдельности не превосходит постоянной, написанной в правой части, и следовательно,:

$$N[\varphi_n, g_n] \leq \alpha_n D\omega[\varphi_n] \leq D \tag{0.67}$$

Это и есть требуемы вспомогательные неравенства.Докажем теперь (2).Имеем, согласно неравенству треугольника

$$\rho_F(f_n, f) \leq \rho_F(f, g_n) + \rho_F(g_n, f_n) = [\int_c^d (f_n - g_n)^2 dt]^{1/2} + [\int_c^d (g_n - f)^2 dt]^{1/2} \tag{0.68}$$

Первое слагаемое в правой части равно

$$[\int_c^d (A\varphi_n - g_n)^2 dt]^{1/2} = [N[\varphi_n, g_n]]^{1/2} \leq \sqrt{\alpha_n}\sqrt{D_n} = \delta\sqrt{\gamma D} \tag{0.69}$$

Второе слагаемое

$$[\int_c^d (g_n - f)^2 dt]^{1/2} \leq \delta_n \tag{0.70}$$

согласно условию теоремы. Поэтому $\rho_F(f_n, f) \leq \delta_n(1 + \sqrt{\gamma D})$ откуда следует, что $\rho_F(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е $f_n \to f$. Докажем (3).Для доказательства компактности последовательности $\varphi_n(t)$ нужно убедиться, что из любого бесконечного подмножества ее элементов можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.Для этого согласно теореме Арцела достаточно доказать, что любая подпоследовательность φ_n равномерно ограниченна и равностепенно непрерывна. Неравенство приведенное выше означает, что $\int_a^b[(\varphi_n^{'})^2+(\varphi_n)^2]dt \leq D$, а тогда в отдельности

$$\int_a^b (\varphi_n^{'})^2 dt \leq D,\ \int_a^b (\varphi_n)^2 dt \leq D, \tag{0.71}$$

Рассмотрим $\varphi_n(t_2)-\varphi_n(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_n^{'}dt$.Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$|\varphi_n(t_2)-\varphi_n(t_1)| = |\int_{t_1}^{t_2}\varphi_n^{'}| \leq \sqrt{\int_{t_1}^{t_2 (\varphi_n^{'})^2}}\sqrt{\int_{t_1}^{t_2}1dt} \leq \sqrt{D}\sqrt{t_2-t_1} \tag{0.72}$$

Отсюда следует, что последовательность $\varphi_n(t)$ равностепенно-непрерывна.Докажем равномерную ограниченность последовательности $\varphi_n(t)$.Для этого воспользуем вторым из неравенств (0.71).Имеем

$$\int_a^b \varphi_n^2(t)dt \leq D \tag{0.73}$$

Следовательно, найдется точка $\varepsilon_n \in [a,b]$ такая, что $\varphi_n^2(\varepsilon_n) \leq \frac{D}{(b-a)}$.При этом равномерно по t и n будет выполнено

$$|\varphi_n(t)| \leq |\varphi_n(\varepsilon_n)| + |\varphi_n(t)-\varphi_n(\varepsilon_n)| \leq \sqrt{\frac{D}{(b-a)}}+\sqrt{D(b-a)} \tag{0.74}$$

Итак, последовательность $\varphi_n(t)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. В силу теоремы Арцела, отсюда следует компактность последовательность $\varphi_n(t)$.Тем самым, доказано свойство (3), а вместе с ним и вся теорема .

0.1 Численное решение интегральных уравнений Фредгольма первого рода

Метод квадратур.

Рассмотрим приближенное решение уравнения (??) методом квадратур.Разобьем на отрезок $[a,b]$ на сетку с узлами $x_1, x_2 \ldots, x_n$. Запишем уравнение (??) в узлах сетки:

$$\tau\varphi(t_i)+\int_a^b K(t_i,s)\varphi(s)ds = f(t_i), \tag{0.75}$$

Аппроксимируем интегралы в равенствах (0.75) конечными суммами с помощью одной из квадратурных формул:

$$\tau\varphi_i+\sum_{j=1}^n A_j K_{ij}\varphi_j = f_i, i=1,2,\ldots,n, \tag{0.76}$$

Здесь $\varphi_i = \varphi(\tilde{t_i})$,$f_i=f(t_i)$,$K_{ij}=K(t_i,t_j)$,$\tilde{\varphi}$ - приближение к искомой функции φ,A_j - коэффициенты квадратурной формулы. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (\tau+A_1K_{11})\varphi_1+A_2K_{12}\varphi_2+\ldots+A_nK_{1n}\varphi_n=f_1 \\ A_1K_{21}\varphi_1+(\tau+A_2K_{22})\varphi_2+\ldots+A_nK_{2n}\varphi_n=f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1K_{n1}\varphi_1+A_2K_{n2}\varphi_2+\ldots+(\tau+A_nK_{nn})\varphi_n=f_n \\ , \end{cases}$$

, Решение системы уравнений (0.1) дает приближенные значения искомой функции в узлах t_i.
Метод минимизации сглаживающего функционала. Определим минумум $\varphi^{\alpha}(t)$ функционала . Для этого применим метод конечно-разностной аппроксимации. Решение строим в области $t, s \in [a, b]$.Вводим равномерную сетку по t и s.Узлы сетки по t : $t0 = a, t_1 \ldots, t_N = b$. Узлы сетки по s : $s_0 = a, s_1, \ldots, s_L = b$.Шаг сетки по t и s равен $h = (b-a)/N$,$h = (b-a)/L$.Тогда функционалу будет соответствовать сумма

$$\overline{M} = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n [\sum_{l=0}^{L} \gamma_l K_{nl} \varphi_l - f_n]^2 + \alpha [\sum_{l=0}^{L} \gamma_l \varphi_l^2 + \sum_{l=0}^{L-1} (\frac{\varphi_{l+1} - \varphi_l}{h})^2 h] \tag{0.77}$$

где $\gamma_0, \ldots, \gamma_N$ - весовые коэффициенты квадратурной формулы(разностной схемы).Величина $\overline{M}$ зависит от выбора φ_l,$\overline{M} = \overline{M}(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$.Минимальное значение $\overline{M}$ достигается при φ_l, определяемых из условия

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial \varphi_l} = 0 \tag{0.78}$$

Вычисляя производные, получаем разностную схему исходной задачи

$$\alpha [\frac{\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1}}{h^2} - \varphi_l] = \sum_{r=0}^{L} \gamma_r \hat{K}_{lr} \varphi_r - \hat{g}_l \tag{0.79}$$

$$\frac{\varphi_0 - \varphi_{-1}}{h} = 0, \frac{\varphi_{L+1} - \varphi_L}{h} = 0 \tag{0.80}$$

где

$$\hat{K}_{lr} = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n K_{nl} K_{nr}, \quad \hat{g}_l = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n K_{ln} f_n \tag{0.81}$$

Полученная задача представляет собой разностную схему, соответствующую задаче на нахождение экстремума функционала.Эта схема имеет порядок аппроксимации $O(h_t^2 + h_s^2)$.

Заключение. Решение системы уравнений (0.1) дает приближенные значения искомой функции в узлах t_i.
Физические и механические приложения приводят, как оказалось, не только к задачам корректным, но и к таким, для которых прямые методы математической физики либо совсем не работают, либо их точность оставляет желать лучшего.К такому классу задач следует отнести интегральные уравнения первого рода, рассмотренные во второй части этой работы.Физическая природа этих задач составляет особую важность для изучения данной темы.Хотя в первой части настоящей работы рассмотрены методы, которые использовались еще до появления электронных вычислительных машин (метод простой итерации,метод наименьших квадратов), современная компьютерная техника значительно расширяет возможности исследователя и позволяет найти решение в гораздо более сжатые сроки . В данной работе были изучены основные классы интегральных уравнений. Помимо доказательства теорем, были рассмотрены базовые численные методы их решения.Для интегрального уравнения Фредгольма первого рода численно реализован метод А.Н.Тихонова, а также рассмотрен численный метод минимизации сглаживающего функционала.