МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода

методом квадратурных сумм

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Курочкина Виктора Сергеевич
фамилия, имя, отчество

Руководитель практики

д.ф.-м.н.,профессор ______________ Г. В. Хромова
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________ В. А. Юрко
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Многие математические задачи, возникающие при интерпретации данных физического эксперимента, относятся к классу так называем некорректно поставленных, или, короче, некорректных задач. Требования к корректности постановки математической задачи были сформулированы в 1932 г. Ж. Адамаром. Требования корректности по Адамару:

1) оно существует для любых исходных данных;

2) оно единственно;

3) оно непрерывно зависит от исходных данных; это означает, что малым изменениям исходных данных соответствуют малые (в выбранной метрике) изменения решения—решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входной информации.

Для некорректных задач, по крайней мере, одно из перечисленных выше условий не выполняется, причем к наиболее серьезным неприятностям приводит нарушение условия 3) — малым возмущениям входной информации могут соответствовать сколь угодно большие возмущения решения (решение устойчиво). Типичным примеров некорректно поставленной задачи является интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Методы решения некорректных задач получили интенсивное развитие в 60-е годы, и определяющую роль в этом процессе сыграли работы А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К, Иванова и др. реализующие алгоритмы (понятие, введенное А.Н. Тихоновым) позволяют получить устойчивое приближение к истинному решению некорректной задачи: иными словами, при стремлении ошибки входной информации к нулю приближенное решение сходится к нулю.

Основное содержание работы. Основная часть состоит из трех глав. В **первой** главе рассказывается некоторые общие сведения об интегральных уравнениях.

Интегральным уравнением называют уравнение относительно неизвестной функции, содержащейся под знаком интеграла. К интегральным уравнениям приводят многие задачи, возникающие и в самой математике, и в многочисленных ее приложениях. Исторически первой задачей, оформленной как интегральное уравнение

$$\int_0^z \frac{\phi(\eta)}{\sqrt{z-\eta}} d\eta = f(z) \tag{1}$$

Считается задача Абеля (1823 г), заключающаяся в определении вида кривой $x = \varphi(z)$, по которой в вертикальной плоскости Oxz под действием силы тяжести скатывается материальная точка так, чтобы начав свое движение без начальной скорости в точке кривой с аппликатой z, она достигла оси Ox за заданное время $T = F(z)$.

Опишем основные типы линейных интегральных уравнений. По тому, постоянны ли обе границы интегрирования или одна из них может быть переменной, линейные интегральные уравнения подразделяются на уравнения Фредгольма и уравнения Вольтерра соответственно. Более простыми (с более хорошими свойствами) и более широко применяемыми являются линейные интегральные уравнения второго рода: Фредгольма —

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{2}$$

и Вольтерра —

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \tag{3}$$

Заданная функция $f(x)$ – свободный член – и неизвестная функция $\varphi(t)$ – решение – в этих уравнениях зависят от переменной s, изменяющейся на отрезке $[a,b]$. Функция двух переменных $K(x,s)$, называемая ядром интегрального уравнения, определяется на множестве точек квадрата $[a,b]\times[a,b]$ в случае интегрального уравнения Фредгольма и треугольника $a \leqslant (s) \leqslant (x) \leqslant (b)$ в случае уравнения Вольтерра

Введение в линейное интегральное уравнение числового параметра λ (который можно отнести и к ядру) придает уравнению более общий вид и позволяет установить теоремы существования решений при тех или иных значениях λ, в то время как при нейтральном значении $\lambda = 1$ решения может не оказаться. Подобно тому, как это делается в теориях линейных систем алгебраических или линейных дифференциальных уравнений, существование и единственность решений линейных неоднородных уравнений (2), (3) изучается посредством изучения соответствующих им однородных уравнений, т.е. уравнений, получающимся из (2), (3) при $f(x) \equiv 0$.

Так, например, изучение уравнения Вольтерра (3) с $\lambda = 1$ и мультипликацативным ядром

$$K(x,s) = p(x)q(s)$$

приводит к решению

$$\varphi(x) = \int_a^x R(x,s)\varphi(s)ds + \varphi(x) \tag{4}$$

с функцией $(R(x,s)$, подсчитываемой по формуле

$$R(x,s) = p(x)q(s)^{\int_s^1 p(\xi)q(\xi)d\xi} \tag{5}$$

Наиболее универсальными и хорошо приспособленными для компьютерных вычислений являются численные методы решения интегральных уравнений. Их построение опирается на замену интеграла в интегральном уравнении конечной суммой на базе какой-либо квадратурной формулы, в результате чего задача сводится к алгебраической системе относительно дискретных значений (каркаса) искомого решения, соответствующих заданным или определяемых выбором квадратурной формулы значениям аргумента (сетке). Такие методы называют квадратурными методами или методом конечных сумм. Они чрезвычайно просты как в идее, так и в реализации, причем без каких-либо изменений их можно применить и к нелинейным интегральным уравнениям, имея лишь в виду, что в этом случае и системы конечномерных уравнений, к которым будет приводить дискретизация, также будут нелинейными.

Во **второй** главе рассматривается квадратурный метод решения интегральных уравнений Вольтерра II рода.

Пример 3. Рассмотрим численное решение уравнения

$$\int_1^x (x^2 + s^2 + 1)\varphi(s)ds = x^2 + \frac{1}{x} \tag{6}$$

На промежутке $[1, 1.3]$ по формулам трапеций и прямоугольников, полагая шаг $h = 0.1$. (точное решение $\varphi(s) = \frac{1}{x^2}$ со значениями

$$\begin{array}{llll} \varphi(1) = 1 & \varphi(1.1) \approx 0.82645 & \varphi(1.2) \approx 0.6944 & \varphi(1.3) \approx 0.59172 \\ \varphi(1.05) \approx 0.90703 & \varphi(1.15) \approx 0.75614 & \varphi(1.25) \approx 0.64 & \end{array}$$

Применим сначала формулу трапеций. Зафиксируем значения

$$s_1 = 1, s_2 = 1.1, s_3 = 1.2, s_4 = 1.3$$

и в получающихся при этом из (6) равенствах

$$\int_1^x (x_i^2 + s^2 + 1)\varphi(s)ds = x_i^2 - \frac{1}{x_i}, i = 1, 2, 3, 4$$

узлами s_j квадратур считаем те же точки $1, 1.1, 1.2, 1.3$. вычислив по формуле начальное значения решения

$$\varphi(1) = \varphi_1 = \frac{f'(1)}{K(1,1)} = -\frac{2x + \frac{1}{x^2}}{2x^2 + 1}\bigg|_x = 1$$

последующие его значения на сетке s_j находим по формулам. Имеем:

$$\varphi(1.1) \approx \varphi_2 = \frac{1.1^2 \frac{1}{1.1} - 0.05(1.1^2 + 1^2 + 1) * 1}{0.05(1.1^2 + 1.1^2 + 1)} \approx 0.8211$$

$$\varphi(1.2) \approx_3 = \frac{1.2^2 - \frac{1}{1.2} - 0.05(1.2^2 + 1^2 + 1) * 1 - 0.1(1.2^2 + 1.1^2 + 1) * 0.8211}{0.05(1.2^2 + 1.2^2 + 1)}$$

≈ 0.6957

$$\varphi(1.3) \approx \varphi_4 = \frac{1.3^2 - \frac{1}{1.3} - 0.05(1.2^2 + 1^2 + 1) * 1 - 0.1(1.3^2 + 1.1^2 + 1) * 0.8211}{0.05(1.3^2 + 1)} -$$

$$-\frac{0.(1.3^2 + 1.2^2 + 1) * 0.6957}{0.05(1.3^2 + 1.3^2 + 1)} \approx 0.5877$$

Теперь обратимся к формуле прямоугольников. При заданном $h = 0.1$ нужно подставить следующие значения:

$$\begin{aligned}
&K_(x_1, s_1) = K(1.1, 1.05) = 3.325 \quad f(x_1) = f(1.1) \approx 0.30091 \\
&L(x_2, s_1) = K(1.2, 1.05) = 3.5425 \\
&K(x_2, s_2) = K(1.2, 1.15) = 3.7625 \quad f(x_2) = f(1.2_) \approx 0.60667 \\
&K(x_3, s_1) = K(1.3, 1.05) = 3.7925 \\
&K(x_3, s_2) = K(1.3, 1.15) = 4.0125 \\
&K(x_3, s_3) = K(1.3, 1.25) = 4.2525 \quad f(x_3) = f(1.3) \approx 0.92077
\end{aligned}$$

Пользуясь ими, последовательно вычисляем:

$$\varphi(1.05) \approx \varphi(1) = \frac{0.30091}{0.1 * 3.3125} \approx 0.90841$$

$$\varphi(1.15) \approx \varphi_2 = \frac{0.60667 - 031 * 3.5424 * 0.90841}{0.1 * 3.7625} \approx 0.75712$$

$$\varphi(1.25) \approx \varphi_3 = \frac{0.92077 - 0.1 * 3.7925 * 0.90841 - 0.1 * 4.0125 * 0.75712}{0.1 * 4.2525} \approx 0.64071$$

Сравнение тех и других серий приближенных значений решения с точными значениями демонстрирует достаточно высокую эффективность применяемых квадратур (как и следовало ожидать, несколько лучшее результаты показывает квадратурная формула средней точки.

В **третьей** главе рассматривается приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм.

Хорошо известно, что задача приближенного решения (численного) решения операторного уравнения I рода вида

$$A\varphi = f \tag{7}$$

с вполне непрерывным оператором A некорректно поставлена. В последние годы появилось большое количество работ, посвященных вопросу устойчивости решения некорректных задач. Среди них особо следует отметить основополагающие работы А.Н.Тихонова [1], [2] в которых сформулировано важное понятие регуляризирующего алгоритма для некорректной задачи и предложен весьма универсальный метод регуляризации, основанный на минимализации сглаживающего параметрического функционала. Весьма важными для приложений частными случаями уравнения (7) являются интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра I рода, имеющие вид

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), a \leqslant x \leqslant b, \tag{8}$$

и
$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), a \leqslant x \leqslant b, \tag{9}$$
соответсвенно. Как правило, методы регуляризации рассматриваются различными авторами [3]-[5] лишь применительно к уравнению (8), поскольку (9) есть частный случай (8) и, следовательно, все результаты, справедливые для (8), автоматически переносятся и на (9). Однако представляется целесообразным разработать регуляризирующие алгоритмы, использующие специфику уравнения (9). Данная работа как раз и посвящена построению одного такого алгоритма, базирующегося на применении метода квадратурных сумм (сокращенно – МКС).

Обозначим
$$\varepsilon_h(x_i) = \varphi(x_i) - \varphi_h(x_i), i = \overline{0,n} \tag{10}$$
где $\varphi(x_i)$ – значение точного решения (9) в точке x_i.

покажем, что
$$|\varepsilon_h(x_i)| \leqslant h\frac{M}{k}e^{\frac{K}{k}(b-a)} \tag{11}$$
Из (11) вытекает, что $\max_{0\leqslant i\leqslant n}| \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$, т.е. погрешность приближенного решения стремится к нулю в равномерной метрике.

Мы рассмотрели "идеальный" случай, когда исходные данные, входящие в уравнения (9) – правая часть $f(x)$ и ядро $K(x,s)$ – известны абсолютно точно. Как следует из полученных выше результатов, задача приближенного решения (9) с помощью МКС, оказывается в этом случае корректной. Однако на практике входная информация обычно задается с некоторой погрешностью, т.е. вместо $f(x)$ и $K(x,s)$ бывают известны их приближения $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{K}(x,s)$, причем основной вид погрешности – погрешность измерений носит нерегулярный, случайный характер, поэтому $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{K}(x,s)$ уже не обладают нужной степенью гладкости и мы вынуждены предполагать, что $\tilde{f}(x) \in L_{2[a,b]}$ и $\tilde{K}(x,s) \in L_2[a,b;a,b]$. При этом задача приближенного решения уравнения (9) становится корректной ($A^{-1}_{L_{2\to 0}}$ неограничен), и необходимо исследовать влияние погрешности исходных данных на точность приближенного решения. Мы рассмотрим вначале случай, когда с погрешностью дана лишь правая часть, т.е. вместо (9) рассмотрим уравнение
$$\int_a^x K(x,s)\tilde{\varphi}(s)ds = \tilde{f}(x), a \leqslant x \leqslant b \tag{9'}$$

Причем

$$||f(x) - \tilde{f}(x)||_{L_{2[a,b]}} = ||\delta(x)||_{L_{2[a,b]}} = \Big[\int_a^b \delta^2(x)dx\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta \qquad (12)$$

δ – заданное число.

Обозначим

$$\tilde{\varepsilon}_h(x_i) = \varphi(x_i) - \tilde{\varphi}_h(x_i)$$

Подставляя оценки для L_{1R} и $L_1\delta$, получим

$$|\tilde{\varepsilon}_h(x_i)| \leqslant (\frac{2\delta}{h^{3/2}} + hM)\frac{1}{K}e^{\frac{K}{k}(b-a)} \qquad (13)$$

Правая часть (13) отражает типичную ситуацию, возникающую при численном решении некорректной задачи – первое слагаемое, связанное с погрешностью правой части, при уменьшении шага h стремится к бесконечности, второе, характеризующее точность квадратурной формулы, стремится к нулю. Разумно поставить вопрос об определении значения h минимизирующего правую часть (13), т.е. дающего наименьшую гарантированную погрешность приближенного решения. Такое значение h естественно назвать квазиоптимальным ($h_{k,0}$).

Заключение. В приложении представлен код программы, которая считает точную и приближенную функцию а затем строит графики.Красным цветом на графиках выделена точная функция, а синим цветом выделено приближение. На приведенных ниже графиках мы видим, что чем больше мы выбираем количество точек, тем точнее будет приближенное решение к точному решению.

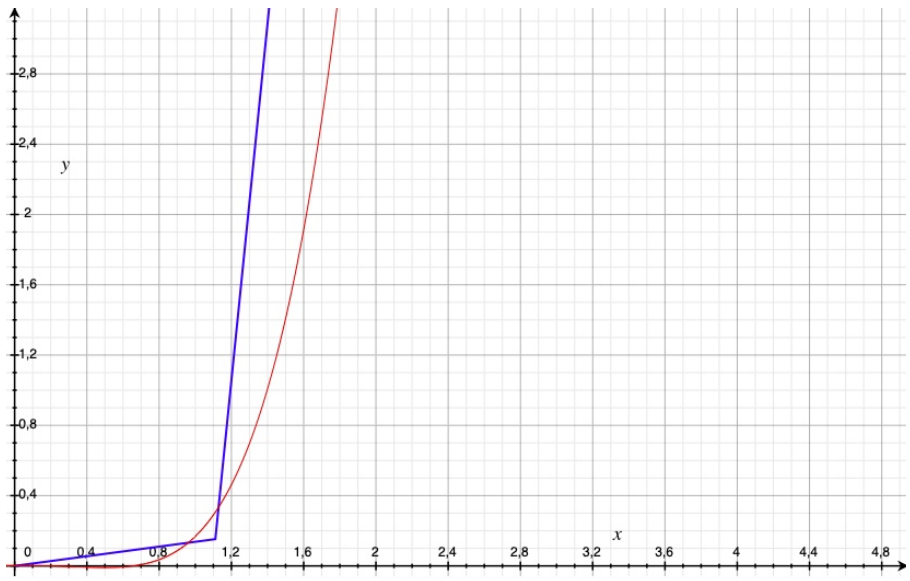

Рисунок 1 – отрезок 0-10; 10 точек