МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Методы вычисления решений интегральных уравнений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика

код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Савочкиной Марии Дмитриевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент — Д.В. Поплавский

должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н, профессор — В.А. Юрко

должность, уч. степень, уч. звание — подпись, дата — инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. В самых разнообразных областях современной науки и техники часто приходится встречаться с математическими задачами, для которых невозможно получить точное решение классическими методами или же решение может быть получено в таком сложном виде, что оно неприемлемо для практического использования. К такого рода задачам можно отнести различные классы интегральных уравнений Фредгольма.

Интегральные уравнения широко используются в различных разделах физики (в теории волн на поверхности жидкостей, квантовой механике, задачах спектроскопии, кристаллографии, акустики, анализа и диагностики плазмы и т.д.), геофизики (в задаче гравиметрии, кинематических задачах сейсмики), механики (при изучении колебаний конструкций), а так же во многих других областях современной науки. Теория интегральных уравнений составляет значительный раздел математического анализа, имеет большое теоретическое и прикладное значение.

Актуальность предлагаемой бакалаврской работы связана со сравнительным исследованием некорректно поставленных, а потому трудно решаемых, интегральных уравнений Фредгольма. Что наряду с прочим в контексте современного развития научно-технического прогресса позволяет привлекать вычислительные мощности современных инновационных компьютерных технологий.

Целью бакалаврской работы является исследование и программная реализация ряда методов вычислительной математики решения различных классов интегральных уравнений Фредгольма, в том числе с целью проведения последующего сравнительного анализа устойчивости или неустойчивости последних.

В работе исследуются вычислительные методы, с контролируемой точностью позволяющие находить приближенные решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго родов.

Данная работа делится на несколько разделов, в которых рассмотрены основные определения связанные с интегральными уравнениями и вычислительные методы, позволяющие находить приближенные решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода в контексте устойчивости.

Основное содержание работы. В первой главе представлены основные понятия и определения, связанные с интегральными уравнениями Фредгольма, а также их классификация с точки зрения вопроса устойчивости.

Интегральным уравнением называют уравнение относительно неизвестной функции, стоящей под знаком интеграла. Общий вид линейного интегрального уравнения следующий

$$x(t) = \lambda \int_D Q(t,s)x(s)ds + f(t). \tag{1}$$

Основные типы интегральных уравнений.

Более простыми и широко применяемыми являются линейные интегральные уравнения второго рода :

$$x(t) = \lambda \int_a^b Q(t,s)x(s)ds + f(t) \tag{2}$$

- уравнение Фредгольма второго рода;

$$x(t) = \lambda \int_a^t Q(t,s)x(s)ds + f(t) \tag{3}$$

- уравнение Вольтерра второго рода. Сложнее обстоит дело с существованием решением, их единственностью и непрерывной зависимостью решений от правой части для интегральных уравнений первого рода:

$$\int_a^b Q(t,s)x(s)ds = f(t)$$

- уравнение Фредгольма первого рода;

$$\int_a^t Q(t,s)x(s)ds = f(t)$$

- уравнение Вольтерра первого рода.

Представленные уравнения характеризуются отсутствием слагаемого x(t), имеют более ограниченную сферу применения и являются наиболее типичными представителями некорректно поставленных задач.

Вторая глава содержит приближенно-аналитические методы решения интегральных уравнений, а именно, метод коллокации, метод моментов и метод замены ядра.

Рассмотрим проекционные методы на примере уравнения Фредгольма второго рода. Решение ищут в виде:

$$y_n = f(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x). \tag{4}$$

В (4) $\phi_j(x)$ - являются линейно независимыми и непрерывными функциями на отрезке [a,b], a_j - неизвестными параметрами.

Метод коллокации

Выберем на отрезке [a,b] n узлов, назовем их узлами коллокации и подставим в уравнение (2) формулу (4):

$$f(x_k) + \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x_k) + \int_a^b Q(x_k, s)(f(s) + \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x))ds = f(x_k). \tag{5}$$

Преобразуем уравнение (5) :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j [\phi_j(x_k) + \int_a^b Q(x_k, s)\phi_j(s)ds] = -\int_a^b Q(x_k, s) f(s)ds, k = 1..n. \tag{6}$$

Решаем систему (6), а затем находим решение интегрального уравнения по формуле (4).

Метод моментов

Подставим в уравнение (2) решение в виде (4) и так как это решение является приближенным, будет справедливо соотношение:

$$L(y_n(x)) = f(x) + r(x), \tag{7}$$

где r(x) будем называть невязкой.

Потребуем, чтобы невязка была ортогональна первым n функциям замкнутой системы, т.е.

$$\int_a^b r(x)\Phi_i(x)dx = 0, k = 1, 2..n. \tag{8}$$

Далее решаем систему (8) и находим коэффициенты a_i.

Метод замены ядра на вырожденное

Ядро называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$Q(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s), \tag{9}$$

где $\alpha_i(x)\beta_i(s)$ - системы линейно независимых функций.

Подставим в уравнение (2) ядро (9):

$$x(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s)x(s)ds = f(x). \tag{10}$$

Введем обозначение $\gamma_i = \int_a^b \beta_i(s)x(s)ds$. Перепишем (10) в виде:

$$x(t) = f(t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\gamma_i. \tag{11}$$

Путем различных преобразований приходим к системе уравнений относительно γ_i

$$A\gamma = \alpha, \tag{12}$$

Решив систему (12) и подставив γ_i в (11), получим решение интегрального уравнения.

Так как при вырожденном ядре можно получить точное аналитическое решение интегрального уравнения, то представляет интерес замены ядра на близкое вырожденное ядро, как правило, для этого используют два способа, а именно, разложение в ряд Тейлора и замена ядра на вырожденное с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.

В третьем разделе подробно изложен **квадратурный метод** решения интегральных уравнений на примере интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода.

Квадратурными методами или методами конечных сумм называют такие методы, построение которых опирается на замену интеграла в интегральном уравнении конечной суммой на основе какой-либо квадратурной формулы, в результате задача сводится к алгебраической системе относительно дискретных значений искомого решения, соответствующих заданным или определяемых выбором квадратурной формулы значениям аргумента. Рассматриваем квадратурную формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b g(s)ds = \sum_{j=1}^{n} A_i^{(n)} g(s_j^n) + O(1/n^m), \tag{13}$$

где $A_i^{(n)}$ - квадратурные коэффициенты, s_j^n - узлы квадратуры, m - порядок погрешности квадратуры, которая равна $O(1/n^m)$.

Теперь заменим интеграл в уравнении (2) на квадратурную формулу (13), получаем равенство:

$$x(t) - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_i^{(n)} Q(t, s_j^n) x(s_j^n) = f(t) + R_n(t),$$

где $t \in [a, b]$, $R_n(t) = O(1/n^m)$ и n - количество узлов. Отбрасываем малую величину $R_n(t)$ и получаем линейное уравнение:

$$x(t) - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_i^{(n)} Q(t, s_j^n) x(s_j^n) = f(t), t \in [a, b]. \tag{14}$$

Функцию $x_n(t)$ примем за приближенное решение уравнения (2). Решения уравнения (14) сводится к решению СЛАУ в узлах сетки:

$$x(t_i) - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_i^{(n)} Q(t_i, s_j^n) x(s_j^n) = f(t_i), i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Введем теперь вектор $\bar{X}_n$ с компонентами $x_i^{(n)} = x_n(t_i), i = 1, 2, \ldots, n$, матрицу M_n с элементами $a_{ij}^{(n)} = A_i^{(n)} Q(t_i, s_j^n)$ и вектор $\bar{F}_n$ с компонентами

$f(t_i)$. Тогда из СЛАУ получаем матричное уравнение $(E_n - \lambda A_n)\bar{U_n} = \bar{F_n}$, где E_n - единичная матрица размера n. Следовательно, его решение будет равно $\bar{U_n} = (E_n - \lambda M_n)^{-1}\bar{F_n}$. В результате получаем таблицу $x_i^{(n)}$ для приближенного решения, которое называется его каркасом.

В случае, если в постановке задачи требуется найти таблицу приближенных значений, то задача решена. Если же требуется знать решение $x(t)$ в аналитическом виде, то пользуемся формулой:

$$x(t) = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_i^{(n)} Q(t, s_j^n) x(s_j^n) + f(t), t \in [a, b]. \tag{16}$$

Точность получаемых решений существенно зависит от гладкости ядра, свободного члена, а также самого решения.

Для интегральных уравнений Фредгольма первого рода перед применением какой-либо квадратурной формулы необходимо произвести его регуляризацию.

Затем строим функционал Тихонова по интегральному оператору $\tilde{A}$ и функции $\tilde{f}$, согласно методу α - регуляризации Тихонова.

Далее, полученное уравнение Тихонова дискретизируется с помощью каких-либо квадратурных формул невысокого порядка точности и включаюся механизмы подбора оптимальных значений параметра регуляризации α, связанных с заданными значениями уровней погрешностей ε и δ ядра и свободного члена.

После подбора оптимальных значений решаем уравнение показанным ранее методом конечных сумм.

Четвертый раздел посвящен численному решению конкретных примеров интегральных уравнений Фредгольма I и II родах ранее рассмотренными методами.

В задаче 1 рассматривается интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$x(t) - 4\int_0^1 t^2 e^{t^2 s^4} x(s) ds = t^3 - (e^{t^2} - 1)$$

при $s, t \in [0, 1]$, а в задаче 2 представлено интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$4 \int_0^1 t^2 e^{t^2 s^4} x(s) ds = (e^{t^2} - 1)$$

при $s, t \in [0, 1]$.

Для решения представленых уравнений используются метод замены ядра и метод квадратур. Далее проводится сравнение точности полученного решения выбранным методом на различном количестве узловых точек и сравнение точности полученного решения модельного уравнения различными методами.

Для исследования устойчивости в правую часть вводим возмущение δ и сравниваем полученное решение уравнения с неоднородностью $f(x)$ с решением уравнения с возмущенной неоднородностью $f(x) + \delta$.

Заключение. В бакалаврской работе исследованы методы вычисления решений интегральных уравнений Фредгольма I-го и II-го родов с учетом корректности постановки задач и устойчивости их решений.

В теоретических разделах работы последовательно рассмотрены вычислительные методы решения соответствующих классов интегральных уравнений.

В практической части представлены результаты численного эксперимента и последующего сравнительного анализа для различных классов интегральных уравнений Фредгольма по следующим основаниям:

1. Сравнение точности решения интегрального уравнения при изменении входных параметров выбранного метода;

2. Сравнение точности решения интегрального уравнения различными методами;

3. Сравнение точности решения невозмущенного интегрального уравнения с точностью решения возмущенного интегрального уравнения.

В Приложении представлена разработанная автором программная реализация численного эксперимента.