

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Восстановление непрерывных функций с помощью
модифицированного оператора Ландау

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 Группы

направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Токаревой Дарьи Николаевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор

Г.В. Хромова

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.А. Юрко

Введение. Данная работа относится к области некорректно поставленных задач. Задача называется поставленной корректно, если решение ее существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Задача будет являться некорректно поставленной, если не выполняется хотя бы одно из условий.

В работе рассматривается задача восстановления функций и метод ее решения с помощью оператора Ландау (метод среднеквадратичных приближений), что имеет большое прикладное значение, так как в практических задачах исходные данные всегда заданы с погрешностью.

Цель работы состоит в изучении задачи восстановления непрерывных функций по их дискретным значениям.

Пусть некоторая непрерывная функция задана ее среднеквадратичными приближениями, то есть вместо $f(x)$ нам известна $f_\delta(x)$, такая что $\|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2}$ на $[a, b] \leq \delta$. Требуется найти такую функцию $\tilde{f}_\delta(x)$, что $\|f_\delta(x) - \tilde{f}_\delta(x)\|_C \rightarrow 0$.

Задача восстановления некорректна, потому что если функция f_δ близка к f в метрике пространства L_2 , то в метрике пространства C она может отличаться от нее сколь угодно сильно.

Для решения этой задачи используются операторы Ландау.

В работе оценивается, насколько хорошо рассматриваемый оператор аппроксимирует заданную точную функцию, а также тестируются два метода для численного вычисления интегралов.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Во введении описывается область работы и ставится цель.

В первой главе рассматривается постановка задачи восстановления непрерывных функций и методы её решения.

Во второй главе рассматриваются операторы Ландау и использование их для решения задачи восстановления, а так же приводится численный алгоритм решения этой задачи.

В приложении приводится программа и результаты численного эксперимента.

Основное содержание работы. Основная часть состоит из двух глав. В **первой** главе вводятся основные определения, связанные с некорректными задачами, решением уравнений первого рода и методами регуляризации. Так же дается постановка задачи восстановления функции, описывается метод регуляризации Тихонова и метод регуляризации с расширенным оператором Стеклова.

Математическая задача называется поставленной корректно, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

Из определения следует, что задача будет являться некорректно поставленной, если не выполняется хотя бы одно из сформулированных требований. При решении практических задач особенно важное значение приобретает последнее требование, поскольку исходные данные в этих задачах получаются в результате измерений и никогда не бывают известны точно, а существование и единственность решений таких задач вытекает из их физической сущности.

Приведём общую постановку задачи приближенного решения уравнения первого рода. Пусть X_1 и X_2 - банаховы пространства. Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad (1)$$

где A - линейный ограниченный оператор, действующий из X_1 в X_2 , и такой, что A^{-1} существует, но неограничен.

Обозначим через $\bar{u}$ - точное решение, через $\bar{f}$ - точную правую часть уравнения (1). Пусть правая часть $\bar{f}$ задана её δ - приближениями f_δ в пространстве X_2 : $\|f_\delta - \bar{f}\|_{X_2} \leq \delta$. Задача приближённого решения уравнения (1) состоит в построении по f_δ последовательности элементов u_δ , такой, что $\|u_\delta - \bar{u}\|_{X_1} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Методы приближённого решения уравнений первого рода называются методами регуляризации и состоят из двух принципиальных моментов:

1) Построения семейства линейных операторов T_α , зависящих от параметра α , действующих из пространства X_2 в пространство X_1 и обладающих свой-

ствами:

а) каждый из операторов T_α определен на всем пространстве X_2 ,

б) $\|T_\alpha\|_{X_2 \rightarrow X_1} < \infty$ при каждом значении α ,

в) для любого $u \in X_1$ $\|T_\alpha Au - u\|_{X_1} \rightarrow 0$, при $\alpha \rightarrow 0$

2) Согласования параметра α с погрешностью δ $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\delta \|T_{\alpha(\delta)}\|_{X_2 \rightarrow X_1} \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$.

Семейство линейных операторов T_α ($\alpha > 0$ - параметр), удовлетворяющее условиям а), б), в), называется регуляризующим семейством для уравнения (1); параметр α называется параметром регуляризации.

Если соотношение $\|T_\alpha Au - u\|_{X_1} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ выполняется не на всем пространстве X_1 , а для $u \in M \subset X_1$, где M - некоторый класс элементов из X_1 , то семейство $\{T_\alpha\}$ называется регуляризующим на классе M ; оператор T_α при фиксированном значении α называется регуляризующим оператором. Если стремление к пределу в $\|T_\alpha Au - u\|_{X_1} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ равномерно относительно $u \in M$, то семейство $\{T_\alpha\}$ называется регуляризующим равномерно на классе M , сам класс M называется классом равномерной регуляризации.

Величину $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, \bar{u})$ будем называть погрешностью метода $T_{\alpha(\delta)}$ в точке.

Постановка задачи восстановления функции. Пусть X_1 и X_2 - два банаховых пространства, таких, что $X_1 \subset X_2$ в теоретикомножественном смысле и выполняется оценка:

$$\|\bullet\|_{X_2} \leq C \|\bullet\|_{X_1} \quad (2)$$

Пусть элемент $u \in X_1$ задан его δ -приближениями f_δ в метрике пространства X_2 : $\|u_\delta - u\| \leq \delta$. Требуется по f_δ и δ построить последовательность элементов $\tilde{u}_\delta$ так, чтобы $\|\tilde{u}_\delta - u\|_{X_1} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Будем называть поставленную задачу задачей восстановления из X_2 и X_1 .

Такая задача возникает, в частности, при обработке исходных данных физических задач. Если, например, $X_1 = C[a, b]$, $X_2 = L_2[a, b]$, то мы приходим к некорректно поставленной задаче восстановления непрерывной функции по её среднеквадратическим δ - приближениям. Если $X_1 = C^{(1)}[a, b]$, $X_2 = C[a, b]$ - к задаче восстановления производной функции, заданной её равномерными δ - приближениями, т.е. в последнем случае речь идёт о приближённом ре-

шении классической некорректной задачи - задачи дифференцирования.

Поставленную в общем задачу восстановления мы будем рассматривать как задачу решения операторного уравнения (1), где A - оператор вложения из X_1 в X_2 , а правая часть задана её δ - приближениями f_δ в X_2 . Существование и единственность решения уравнения (1) тривиальны. Из оценки (2) следует справедливость утверждения: оператор A^{-1} , обратный к оператору вложения из X_1 в X_2 , неограничен тогда и только тогда, когда нормы в пространствах X_1 и X_2 неэквивалентны. Поскольку в этом случае уравнение (1) является уравнением первого рода, то отсюда следует, что для приближённого решения задачи восстановления из X_1 в X_2 можно применить любой из методов регуляризации, подходящий к данной ситуации.

Метод регуляризации Тихонова. Пусть в уравнении (1) с оператором вложения точное решение имеет абсолютно непрерывную производную $(r - 1)$ -го порядка ($r \geq 1$ - целое), а $\bar{u}^{(r)}(x) \in L_2[0, 1]$, то есть $\bar{u}(x) \in W_2^r[0, 1]$. Считаем для простоты, что $\|\bar{u}^{(r)}(x)\|_{W_2^r} = \left(\int_0^1 [\bar{u}^2(x) + (\bar{u}^{(r)}(x))^2] dx \right)^{1/2}$. Рассмотрим задачу восстановления из $L_2[0, 1]$ в $C^{(r-1)}[0, 1]$, при этом

$$\|u(x)\|_{C^{(r-1)}} = \max_{0 \leq p \leq r-1} \|u^{(p)}(x)\|_C$$

Применим для нахождения приближённого решения метод регуляризации Тихонова $R_{\alpha(\delta)}$. Справедлива теорема

Теорема 1. Семейство операторов R_α , соответствующей методу регуляризации Тихонова, имеет вид: $R_\alpha f = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x, t, -\frac{1}{\alpha}) f(t) dt$, где $G(x, t, -\frac{1}{\alpha})$ - ядро резольвенты дифференциального оператора $\hat{L}$, порождённого дифференциальным выражением $\hat{L}y = (-1)^r y^{(2r)} + y$ и краевыми условиями: $y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1) = 0, k = r, \dots, 2r - 1$, со значениями спектрального параметра $\lambda = -1/\alpha$.

Рассмотрим метод регуляризации $R_{\alpha(\delta)}$ при $r = 1$. **Теорема 2.** Для того чтобы $\Delta(\delta, R_{\alpha(\delta)}, \bar{u}) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\delta(\alpha(\delta))^{-1/4} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Метод регуляризации с расширенным оператором Стеклова. Рассмотрим оператор, который часто используется для теоретического обосно-

вания различных фактов сходимости, оценок и т.п., - оператор Стеклова: $S_\alpha \varphi = \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \varphi(t) dt$. Как оператор приближения непрерывных функций он имеет преимущество перед другими операторами в том, что от приближаемой функции не требуется дополнительных условий гладкости или периодичности. Его недостаток состоит в том, что он может служить для приближения функций лишь во внутренних точках отрезка $[a, b]$.

Построим расширенный оператор Стеклова, который получается путём продолжения функции за границы отрезка чётным образом.

Пусть

$$u_1(x) = \begin{cases} u(2a - x) & \text{при } x < a, \\ u(x) & \text{при } a \leq x \leq b, \\ u(2b - x) & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Разобьём отрезок $[a, b]$ на три: $[a, a + \alpha]$, $[a + \alpha, b - \alpha]$, $[b - \alpha, b]$. На каждом из них рассмотрим функцию

$$S_\alpha u_1 = \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} u_1(t) dt.$$

Пусть $x \in [a, a + \alpha]$. Тогда $\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} u_1(t) dt = \int_{x-\alpha}^a u_1(t) dt + \int_a^{x+\alpha} u_1(t) dt = \int_{x-\alpha}^a u(2a - t) dt + \int_a^{x+\alpha} u(t) dt = \int_a^{2a-x+\alpha} u(t) dt + \int_a^{x+\alpha} u(t) dt = 2 \int_a^{2a-x+\alpha} u(t) dt + \int_{2a-x+\alpha}^{x+\alpha} u(t) dt$, поскольку $x + \alpha \geq 2a - x + \alpha$.

Аналогично поступаем на отрезке $[b - \alpha, b]$. Тогда получаем оператор

$$\tilde{S}_\alpha u = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_a^{2a-x+\alpha} u(t) dt + \frac{1}{2\alpha} \int_{2a-x+\alpha}^{x+\alpha} u(t) dt, & x \in [a, a + \alpha], \\ \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} u(t) dt, & x \in [a + \alpha, b - \alpha], \\ \frac{1}{2\alpha} \int_a^{2b-x-\alpha} u(t) dt + \frac{1}{\alpha} \int_{2b-x-\alpha}^b u(t) dt, & x \in [b - \alpha, b]. \end{cases} \quad (16)$$

Во **второй** главе описываются операторы Ландау и ряд лемм и теорем для них, а так же использование этих операторов для решения задачи восстановления непрерывных функций. Помимо этого приведен алгоритм численного эксперимента.

В теории приближений известны операторы Ландау $L_n f = \frac{1}{2J_n} \int_0^1 (1 - (x - t)^2)^n f(t) dt$, где $J_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$. Рассмотрим операторы вида $K_n f = \frac{n+1}{2} \int_0^1 (1 - |x - t|)^n f(t) dt$. Из этих операторов далее будет построено модифицированное семейство операторов с разрывной областью значений, позволяющее, тем не менее, получать равномерные приближения к непрерывным функциям на всем отрезке их задания. Дальнейшее исследование этих модифицированных операторов показывает, что они обладают хорошими аппроксимативными свойствами. (Например, при аппроксимации единицы на отрезке получается более высокая скорость сходимости, чем для соответствующих модифицированных операторов Ландау.)

Представим операторы K_n в виде $K_n f = K_{1n} f + K_{2n} f$, где $K_{1n} f = \frac{n+1}{2} \int_0^x (1 - (x - t))^n f(t) dt$, $K_{2n} f = \frac{n+1}{2} \int_x^1 (1 - (t - x))^n f(t) dt$.

Лемма 1. Если $\varepsilon \leq x \leq 1$, $0 < \varepsilon < 1/2$, то $\left\| K_{1n} 1 - \frac{1}{2} \right\|_{C[\varepsilon, 1]} = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon)^{n+1}$.

Если $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$, то $\left\| K_{2n} 1 - \frac{1}{2} \right\|_{C[0, 1-\varepsilon]} = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon)^{n+1}$.

Следствие. Если $\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1/2$, то $\|K_n 1 - 1\|_{C[\varepsilon, 1-\varepsilon]} \leq (1 - \varepsilon)^{n+1}$.

Лемма 2. Имеет место равенство $\|T_n 1 - 1\|_{L_\infty[0, 1]} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Теперь рассмотрим операторы Ландау и построим по аналогии с операторами T_n операторы

$$\hat{T}_n f = \begin{cases} \hat{T}_{2n} f, & x \in [1/2, 1], \\ \hat{T}_{1n} f, & x \in [0, 1/2], \end{cases}$$

где $\hat{T}_{1n}f = \frac{J_{1n}f}{J_n}, \hat{T}_{2n}f = \frac{J_{2n}f}{J_n}, J_{1n}f = \int_0^x (1 - (x - t)^2)^n f(t) dt, J_{2n}f = \int_x^1 (1 - (x - t)^2)^n f(t) dt$. Сравним операторы T_n и $\hat{T}_n$ по скорости сходимости приближений к $f(x) \equiv 1$.

Лемма 3. Справедливы представления $T_{1n}f - f = (n+1) \int_0^x (1 - (x - t))^n (f(t) - f(x)) dt - f(x)(1 - x)^{n+1},$

$T_{2n}f - f = (n+1) \int_x^1 (1 - (t - x))^n (f(t) - f(x)) dt - f(x)x^{n+1}.$

Теорема 1. Для любой $f(x) \in C[0, 1]$ имеет место оценка $\|T_n f - f\|_{L_\infty[0,1]} \leq \omega(\delta_1) + K \left[2(1 - \delta_1)^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right]$, где $0 < \delta_1 < 1/2$, $\omega(\delta_1)$ - модуль непрерывности функции $f(x)$, $K = \|f\|_{C[0,1]}$. Пусть $f(x) \in M \equiv \{f(x) \in Lip_1 : f(0) = 0\}$. Рассмотрим величину $\Delta_1(T_n, M) \equiv \sup\{\|T_n f - f\|_{L_\infty[0,1]} : f \in M\}$.

Лемма 4. Если $f(x) \in M$, то $\|T_{1n}f - f\|_{C[1/2,1]} \leq \frac{1}{n+2}, \|T_{2n}f - f\|_{C[0,1/2]} \leq \frac{1}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{2^{n+2}}.$

Теорема 2. Справедлива двусторонняя оценка $\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \leq \Delta_1(T_n, M) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2^{n+2}}.$

Пусть теперь вместо $f(x) \in C[0, 1]$ нам известно ее среднеквадратичное δ -приближение $f_\delta(x)$. Рассмотрим задачу восстановления функции $f(x)$ по этому приближению с помощью операторов T_n . Как известно, указанная задача является некорректно поставленной, и здесь операторы T_n выступают в роли регуляризующих операторов.

Лемма 5. Справедливо равенство $\|T_n\|_{L_2[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}.$

Алгоритм программы. Дана точная функция $f(x) = x^2$. Наша задача - посмотреть, на сколько хорошо модифицированный оператор Ландау T_n приближает эту функцию.

$$T_n f = \begin{cases} T_{2n} f, & x \in [0, 1/2], \\ T_{1n} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где $T_{jn} = 2K_{jn}, j = 1, 2$. То есть алгоритм решения данной задачи заключается в том, что мы разбиваем отрезок $[0, 1]$ на две равные части, и на первой части применяем оператор T_{2n} , а на второй части применяем оператор T_{1n} .

$$K_{1n}f = \frac{n+1}{2} \int_0^x (1 - (x-t))^n f(t) dt,$$

$$K_{2n}f = \frac{n+1}{2} \int_x^1 (1 - (t-x))^n f(t) dt.$$

В программе мы выбираем каким конкретно методом (трапеций или левых прямоугольников) будем численно вычислять интегралы.

Пределы интегралов "расширяются", то есть для $K_{1n}f = \int_0^x, T_{1n}f = 2K_{1n}f, x \in [1/2, 1]$. При попадании x в единицу, получим интеграл по полному отрезку.

Для $K_{2n}f = \int_x^1, T_{2n}f = 2K_{2n}f, x \in [0, 1/2]$. Так же получим интеграл по полному отрезку, поскольку интегрируем до единицы, а x может попасть в ноль.

Интегралы $K_{1n}f$ и $K_{2n}f$ численно вычисляются таким образом:

Имеется основное разбиение сетки на N узлов. Но если мы хотим посчитать интеграл от нулевого узла до первого, нам нужно будет строить дополнительное разбиение сетки, то есть каждый из отрезков $[x_j; x_{j+1}]$ поделит на "num" частей. "num" вводится с клавиатуры. Это необходимо делать из-за того, что когда мы считаем, например, интеграл по отрезку $[x_0, x_1]$ в формуле численного интегрирования будут участвовать только два узла x_0 и x_1 . При построении численного интеграла по этим узлам мы получим очень низкую точность. То есть дополнительное разбиение необходимо вводить для того, чтобы повысить точность численного решения интегралов.

Функция **setBounds** получает на вход концы отрезка a и b , шаг сетки h и переменную N_t в которую в момент вызова функции запишется число узлов сетки. И далее циклом задаём эти узлы, и в конце возвращаем массив узлов. Функция **f** получает число x , а возвращает его квадрат. Введена для удобства записи кода.

Функция **IntegralFunction** получает на вход два числа: x и t , и степень n . Возвращает значение подынтегральной функции оператора $K_{1n}f$ или $K_{2n}f$. Обозначим: сетка на отрезке $[0, 1]$ - W , а сетка на отрезках $[x_j; x_{j+1}]$ - w . С клавиатуры вводим подынтегральную степень n , количество узлов N сетки на отрезке $[0, 1]$ и число узлов для каждого из отрезков $[x_j; x_{j+1}]$. Далее считаем шаг сетки, заполняем массив узлов сетки W . И далее заполняем массивы $T_{1n}f$ и $T_{2n}f$ нулями. Это делается для их дальнейшего изменения.

Далее вызываем функцию **solution**, которая получает на вход массив узлов сетки W (называется массив x), два массива T_1 и T_2 , числа N , n , num и номер метода (1 - левых прямоугольников или 2 - трапеций).

Опишем действия функции **solution**: циклом "пробегаемся" по сетке W , если узел сетки $x_j \in [0, 1/2]$, то вызываем функцию T_{2nj} . Если $x_j \in [1/2, 1]$, вызываем функцию T_{1nj} . Функции получают на вход массивы T_1 и T_2 соответственно.

Работа функции T_{2nj} : получает на вход массив T_2 и массив узлов сетки W . В функции считаем шаг H (шаг сетки w) по формуле $\frac{x_1 - x_0}{num}$. Далее узлы сетки w будем обозначать через t_i , то есть сетка w представлена массивом t . В функции мы проверяем номер метода и вызываем либо функцию **LeftRectangle (LR)**, либо **Trapezoidal (T)**.

Функции LR и T получают на вход массивы x , t и T_2 , шаг сетки H , степень под интегралом n , число узлов сетки w - N_t , номер узла от которого начинаем интегрировать ($\int_{x_j}^1$, то есть узел, от которого начинаем интегрировать - x_j), а так же цифру 2. Цифра нужна для того, чтобы в функциях LR и T менять местами массивы t и x (подынтегральные выражения в операторах $K_{1n}f$ и $K_{2n}f$ выглядят следующим образом: для $K_{1n}f$ - $(1 - (x - t))^n f(t)$, для $K_{2n}f$ - $(1 - (t - x))^n f(t)$. Для того, чтобы поменять местами x и t в функциях LR и T передаем переменную ID)

Функция **Trapezoidal** для подсчёта интеграла использует метод трапеций.

Функция **LeftRectangle** использует метод левых прямоугольников.

В качестве подынтегральной функции берем функцию **IntegralFunction**, умноженную на $n + 1$ и H .

$n + 1$ в формуле для $K_{1n}f$ заносим под интеграл, так как это константа и это

не повлияет на результат.

На выходе получим два массива значений функции: T_1 и T_2 , которые являются приближениями функции x^2 . То есть мы получаем пары точек $T_{nj}[k]$ и $x_k, j = 1, 2$, где x_k соответствуют координатам x , а $T_{nj}[k]$ соответствуют координатам y . По полученным точкам строим график.

Заключение. Проведенный численный эксперимент показал, что оператор T_n хорошо приближает точную функцию $f(x) = x^2$.

В первой главе даются основные определения, ставится задача восстановления непрерывных функций по их среднеквадратичному приближению и описываются методы её решения.

Во второй главе доказываются хорошие аппроксимативные свойства операторов Ландау, возможность их использования для решения задачи восстановления. А также приводится численный алгоритм решения этой задачи, который заключается в разбиении отрезка, на котором задана точная непрерывная функция, на две равные части, на каждой из которых применяются два модифицированных оператора.

В приложении приводится программа и результаты численного эксперимента.

В процессе выполнения работы были приобретены навыки работы с языком программирования C++.

Все проведенные в работе исследования позволили более углубленно изучить некорректно поставленные задачи, операторы Ландау. А также повысить навык решения практических задач в данных областях программным способом.