

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**МЕТОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ РИСКА СТРАХОВЫХ
КОМПАНИЙ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы

направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Савостова Арсений Сергеевича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

А. К. Смирнов

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы обусловлена необходимостью создания систем более эффективной оценки финансового состояния страховой компании, так же повышение уровня ее финансовой устойчивости. Развитие страхового рынка, наличие общественной потребности на страховые услуги, дают основание для постановки вопроса о необходимости построения математических моделей работы страховой компании. В данной работе рассматриваются модели имущественного страхования, так как имущественное страхование на сегодняшний день является наиболее обширной отраслью страхового рынка и главным условием эффективного функционирования страхового рынка - это надежность его страховщиков. Рассмотрение финансовой устойчивости недостаточно полное с точки зрения разнообразия данной проблемы, но оно позволяет использовать формальные экономико-математические модели для получения объективных оценок, которые ложатся в основу принятия решения руководством страховой компании. Применение экономико-математических средств позволяют значительно повысить эффективность и обоснованность принятия решения по управлению финансовой устойчивостью в рамках основных ее характеристик - вероятности разорения, оптимизации тарифной ставки, величины начального капитала, перестраховочной политики и т.д.

Целью бакалаврской работы является построение и анализ перестрахования в динамических моделях риска.

Объектом исследования являются перестрахование в динамических моделях.

Предмет исследования - значение вероятности разорения. Для достижения поставленных целей в работе необходимо смоделировать работу страховой компании:

- определить начальные величины модели, такие как начальный капитал, скорость поступления исков, средств, страховая надбавка, схема перестрахования;
- получить значение оценки вероятности разорения страховой компании, и ожидаемого дохода;
- на основе полученной оценки, определить параметры перестрахования.

Для этого необходимо решить следующие **задачи**:

- определить необходимые понятия, для описания модели риска;
- определить функции распределения пригодные для описания случайных величин, таких как число исков предъявляемых страховой компанией и величины ущерба;
- дать описание динамической модели риска, и основных задач рассматриваемых в рамках этой модели;
- дать описание схемы пропорционального перестрахования, и перестрахования превышения потерь, на основе динамической модели риска;
- построить модель риска, для различных схем перестрахования.

Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух теоретических разделов и одного практического, заключения, списка использованных источников и двух приложений.

Введение содержит основные положения: обоснование актуальности темы работы, формулируется цель, объект и предмет исследования.

В **первом** разделе, рассматриваются основные понятия связанные с работой страховой компании. Такие как:

- u – начальный капитал компании;
- $T_0=0 \leq T_1 \leq \dots$ -моменты наступления отдельных исков;
- общее количество поданных исков к моменту времени $t \geq 0$
 $\nu(t) = \sup n : T_n \leq t$;
- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ суммарные выплаты по искам к моменту t - процесс риска ($X(t) = 0$, если $N(t) = 0$);
- $C(t)$ величина премий, полученных к моменту $t \geq 0$;
- $u(t) = u_0 + C(t) - S(t)$ капитал компании в момент $t \geq 0$.

Описывается *модель поступления исков*, как пуассоновский процесс с интенсивностью λ , и основные свойства этого процесса. Определяются модели *индивидуального* и *коллективного риска*. Вводится определение динамической модели риска.

Процессом риска Спарре Андерсена называется случайный процесс вида:

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, t \geq 0,$$

где $c > 0$, $N(t)$ - процесс восстановления, X_1, X_2, \dots - независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$ такой, что $F(0) = 0$, независимые от процесса $N(t)$ (для определённости полагаем, что $\sum_{k=1}^0 = 0$). В нашей простейшей модели предполагается, что страховое возмещение выплачивается немедленно после наступления страхового случая.

Нагрузкой (коэффициентом) безопасности называется величина

$$\theta = \frac{c\alpha - \mu}{\mu} = \frac{c\alpha}{\mu} - 1.$$

Нагрузка безопасности θ иногда называется *относительной нагрузкой безопасности*. Она имеет смысл "удельного" дохода страховой компании в единицу времени.

Классическим процессом риска называется процесс риска Спарре Андерсена, в котором $N(t)$ - пуассоновский процесс, с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$.

Основной характеристикой этой модели является вероятность разорения

$$\psi(t, u) = P(\tau \leq t | R(0) = u). \quad (1)$$

Основными теоретическими результатами для динамической модели риска являются: *Характеристический коэффициент* (или коэффициент Лундберга). Характеристический коэффициент определяется как положительное решение характеристического уравнения относительно z :

$$Ee^{zY} = 1 + (1 + \theta)mz. \quad (2)$$

Неравенство лундберга:

$$R(u) \leq e^{-ru}, \quad (3)$$

Асимптотическая оценка вероятности разорения

$$R(u) \sim \frac{\theta m}{\psi' r - (1 + \theta)m} e^{-ru}. \quad (4)$$

Этот результат известен как теорема Крамера-Лундберга.

Имея в виду неравенство Лундберга и асимптотику Крамера-Лундберга, можно сказать, что вероятность разорения мала, если характеристический коэффициент r большой. Иными словами, характеристический коэффициент r , который включает в себя основные параметры модели (интенсивность поступления исков λ , распределение величин исков $F(x)$, скорость поступления премий c), является интегральной характеристикой финансовой безопасности компании.

Получена формула для *точного расчета вероятности разорения*:

$$\rho(s) = \frac{1 - \varphi(s) - ms}{s(1 - \varphi(s) - (1 + \theta)ms)}. \quad (5)$$

Эта формула дает явное выражение для вероятности разорения в терминах преобразования Лапласа. Для конкретного распределения величины иска можно в явном виде определить $\varphi(s)$ и, значит, $\rho(s)$. Полученное явное выражение можно обратить (аналитически или численно) и получить в явном виде зависимость $R(u)$ от величины начальных резервов u .

Второй раздел посвящён описанию моделей перестрахования.

Для страховой компании существует опасность финансовых потерь, связанная с неопределенностью предъявления очень больших исков. Для решения этой проблемы страховые компании прибегают к единственно возможному средству - страхованию своего риска в другой компании. Такой вид страхования называется перестрахованием (reinsurance). Компания, непосредственно заключающая договора страхования и желающая перестраховать часть своего риска, называется передающей компанией (ceding company), а компания, которая страхует исходную страховую компанию называется перестраховочной компанией (reinsurance company).

Вводятся понятия пропорционального перестрахования, и перестрахования превышения потерь для индивидуальной модели риска.

Договор *пропорционального перестрахования* заключается в следующем. Устанавливается некоторый предел удержания α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Если индивидуальный иск составляет X рублей, то сумму αX платит передающая компания, а сумму $(1 - \alpha)X$ выплачивает перестраховочная компания. Тогда после перестрахования суммарный иск к передающей компании, который был равен $S = X_1 + \dots + X_N$, уменьшается и становится равным $\alpha S = \alpha X_1 + \dots + \alpha X_N$. Однако одновременно и уменьшается капитал передающей компании. До заключения договора перестрахования он был равен $u + (1 + \theta) \cdot ES$, где u - начальный резервный фонд, а θ - относительная страховая надбавка. Заключение договора перестрахования приводит к выплате перестраховочной компании суммы $(1 + \theta^*) \cdot (1 - \alpha)ES$, где $(1 - \alpha)ES$ - ожи-

даемый суммарный иск к перестраховочной компании, а θ^* - относительная страховая надбавка, устанавливаемая перестраховочной компанией. Поэтому после заключения договора перестрахования, резервный фонд компании становится равным:

$$u + (1 + \theta)ES - (1 - \theta^*) \cdot (1 - \alpha)ES = u + [\theta - \theta^* + (1 + \theta^*)\alpha]ES.$$

Соответственно вероятность разорения становится равной:

$$P(\alpha S > u + [\theta - \theta^* + (1 + \theta^*)\alpha] \cdot ES) = P(S > [1 + \theta^* + (u/ES + \theta - \theta^*)/\alpha] \cdot ES).$$

Если $\theta^* < \theta + u/ES$, то при уменьшении предела удержания α от 1 (отсутствие перестрахования) до 0 (полное перестрахование) вероятность разорения убывает от первоначального значения $P(S > [1 + \theta + u/ES] \cdot ES)$ до нуля.

Договор *перестрахования превышения потерь* заключается в следующем. Устанавливается некоторый предел удержания r . Если величина индивидуального иска не превосходит r , то передающая компания оплачивает иск самостоятельно. Если же индивидуальный иск превосходит r , то передающая компания оплачивает сумму r , а оставшуюся сумму $X - r$ оплачивает перестраховочная компания. Таким образом, иск X превращается в иск $X^{(r)} = \min(X, r)$ к передающей компании и в иск $\max(X - r, 0) = X - X^{(r)}$ к перестраховочной компании. Предположим, что уступающая компания перестраховала N однотипных договоров, т.е. иски X_1, \dots, X_N по ним являются независимыми и одинаково распределёнными случайными величинами. Тогда суммарный иск к передающей компании, который был равен $S = X_1 + \dots + X_N$, уменьшается и становится равным $S^{(r)} = X_1^{(r)} + \dots + X_N^{(r)}$. Однако, одновременно уменьшается и капитал передающей компании. До заключения договора перестрахования он был равен (для простоты учитываем только премии):

$$N_p = N(1 + \theta)p_0,$$

где $p_0 = EX$ - нетто-премия, а θ - относительная страховая надбавка. Заключение договора перестрахования приводит к выплате перестраховочной компании суммы $N(1 + \theta^*) \cdot (EX - EX^{(r)})$ - ожидаемый индивидуальный

иск к перестраховочной компании, а θ^* - относительная страховая надбавка, установленная перестраховочной компанией. Поэтому после заключения договора перестрахования, капитал передающей компании становится равным:

$$N(1 + \theta)EX - N(1 + \theta^*) \cdot (EX - EX^{(r)}) = N(\theta - \theta^*)EX + N(1 + \theta^*) \cdot EX^{(r)}.$$

Соответственно, вероятность разорения становится равной

$$P(S^{(r)} > N(\theta - \theta^*)EX + N(1 + \theta^*)EX^{(r)}).$$

Затем определяется *перестрахование для динамической модели риска*.

Рассматривается некоторый вид перестрахования, описываемый функцией $h(x)$, так что каждый иск величиной Y приводит к иску величиной $h(Y)$ к перестраховочной компании и уменьшает реальные потери передающей компании с Y до $Y' = Y - h(Y)$. Поскольку за единицу времени представляется в среднем λ исков, в среднем за единицу времени перестраховочная компания выплачивает в виде страховых возмещений сумму $\lambda \cdot Eh(Y)$. Значит, за этот промежуток времени она должна получить в виде платы за перестрахование сумму $(1 + \theta^*) \cdot \lambda \cdot Eh(Y)$. Предположим, что эта сумма выплачивается непрерывно. Тогда для передающей компании это будет означать уменьшение скорости поступления премий с величины $c = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot EY$ до величины $c' = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot EY - (1 + \theta^*) \cdot \lambda \cdot Eh(Y)$. Таким образом, после перестрахования функционирование передающей компании описывается динамической моделью с изменёнными параметрами: скорость поступления премий есть $c' = (1 + \theta) \cdot \lambda \cdot EY - (1 + \theta^*) \cdot \lambda \cdot Eh(Y)$, скорость поступления исков есть $\lambda' = \lambda$, величина исков есть $Y_i' = Y_i - h(Y_i)$. Относительная страховая надбавка становится равной

$$\theta' = \frac{c'}{\lambda'm'} - 1 = \frac{\theta * EY - \theta^* \cdot Eh(Y)}{EY - Eh(Y)}.$$

Запишем процесс формирования капитала страховой компании в мо-

мент времени t , с учетом перестрахования в виде:

$$\xi(t) = U - \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - h(X_i)) + (c - c') \cdot t,$$

где $c = (1 + \theta) \cdot \lambda^+ \cdot EX$, а $c' = (1 + \theta') \cdot \lambda^+ \cdot Eh(X)$

В **третьем** разделе моделируется работа страховой компании.

Для моделирования была написана программа на языке Java. Базовая модель риска имеет вид:

$$\xi(t) = U - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i + c \cdot t.$$

В этой модели, $\xi(t)$ - это капитал компании в момент времени t . Он формируется из начального капитала U , за вычетом исков которые поступили к моменту времени t , равные $\sum_{i=0}^{N(t)} X_i$. Плюс премии поступившие за время t , равные $c \cdot t$. $c = (1 + \theta) \cdot \lambda_+ \cdot EX_i$.

Рассмотрим эту модель с учетом перестрахования, вид функции $h(X)$ зависит от схемы перестрахования.

$$\xi(t) = U - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i - h(X_i) + c' \cdot t,$$

где

$$c' = (1 + \theta) \cdot \lambda_+ \cdot EX_i - (1 + \theta^*) \cdot \lambda_+ \cdot Eh(X_i).$$

При пропорционально страховании $h(X)$ примет вид $(1 - \alpha) \cdot X_i$, где α - предел удержания.

Тогда в конечном виде

$$\xi(t) = U - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i - (1 - \alpha)X_i + c' \cdot t,$$

где

$$c' = (1 + \theta) \cdot \lambda_+ \cdot EX_i - (1 + \theta^*) \cdot \lambda_+ \cdot (1 - \alpha)(X_i).$$

При использовании схемы перестрахования превышения потерь, устанавли-

вается предел удержания r . Если величина иска $X_i < r$, то передающая компания оплачивает иск X_i - полностью. Если размер иска $X_i > r$, то передающая компания оплачивает сумму r , а иск величиной $X_i - r$ оплачивает перестраховочная компания.

Тогда функция $h(X)$ - примет вид:

$$h(X) = \begin{cases} 0 & X_i < r; \\ X_i - r & X_i > r. \end{cases}$$

Необходимо смоделировать процесс поступления исков

$$\sum_{i=0}^{N(t)} X_i - (1 - \alpha)X_i$$

$N(t)$ - пуассоновская случайная величина, с параметром λ^- . Она характеризует количество исков, поступивших за время T . Для моделирования использовался алгоритм РЕХР (Poisson Exponential). Моделирование распределения Пуассона через случайные величины с показательным распределением.

Моделирование размера исков. Каждому виду страхования и каждому страховому портфелю соответствует своё (смешанное) распределение убытков, зависящее, в частности, от размеров страховых сумм по отдельным рискам, а так же от страхуемых событий. Но как показывает практика страхового рынка, структуры убытков во всех видах страхования схожи. Обычно наблюдается намного больше маленьких убытков, чем больших. Строго говоря, концентрация убытков, с увеличением размера убытка, уменьшается. Для упрощения модели, в примере в качестве распределения размера иска, используется равномерное распределение.

Моделирование моментов наступления исков. Моделируется $N(t)$ равномерно-распределённых на отрезке $[0, T]$ случайных величин. Затем полученные величины сортируются по возрастанию.

Моделируется генерация жизнедеятельности компании, на промежутке $[0, T]$. На основании входных и смоделированных данных, для этой генерации считается капитал компании. Если капитал $\xi \leq 0$, то компания разоряется.

Чтобы оценить вероятность неразорения, моделируется M генераций жизнедеятельности компании, вероятность неразорения оценивается как относительная частота генераций с неразорением к общему числу генераций, а ожидаемый доход, как выборочное среднее дохода по всем генерациям.

Пример: (пропорциональное перестрахование)

Входные параметры:

- начальный капитал $U = 10$
- интенсивность поступления исков $\lambda_- = 3$
- интенсивность поступления премий $\lambda_+ = 2$
- надбавка передающей компании $\theta = 0.7$
- надбавка перестраховочной компании $\theta' = 0.7$
- временной промежуток $T = 365$
- количество генераций $M = 10000$

Результат:

Параметр α	Вероятность неразорения	Ожидаемый доход
1.0	0.9853	72.1
0.9	0.9891	64.9
0.8	0.9936	57.8
0.7	0.9960	50.8
0.6	0.9993	43.7
0.5	0.9998	36.5

Из данного примера можно увидеть, что при увеличении доли перестрахования, увеличивается вероятность неразорения, при уменьшении ожидаемого дохода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Имущественное страхование на сегодняшний день является наиболее обширной отраслью страхового рынка и главным условием эффективного функционирования страхового рынка надежность его страховщиков. Главным в реализации процесса страхования является его финансовая устойчивость, то есть поддержание способности любого страховщика, действующего на рынке, выполнять взятые на себя обязательства своевременно и в полном объеме. В данной работе были рассмотрены динамическая модель риска, и схемы перестрахования на основе этой модели. Смоделирована работа страховой компании на основе этих моделей. Таким образом, цель бакалаврской работы достигнута и реализованы все поставленные задачи.