МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПУАССОНОВСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ ТРЕБОВАНИЙ И РАЗЛИЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ИХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Ольховой Анны Юрьевны

Научный руководитель
старший преподаватель ______________ Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Каждый день мы сталкиваемся с различными формами обслуживания и обслуживающими системами. В качестве таких систем могут выступать телефонные станции, диспетчерские службы таксопарков, магазины, салоны красоты, банки, рестораны быстрого обслуживания и т.д. Все эти системы состоят из определенного числа обслуживающих приборов, в качестве которых могут фигурировать различные приборы, аппараты, линии связи, люди и т. п. Главная функция систем массового обслуживания заключается в удовлетворении поступающего в нее потока заявок. Заявки поступают в систему одна за одной в случайные моменты времени, время обслуживания каждой заявки так же случайно.

Данная тема актуальна так как имитационное моделирование является мощным инструментом исследования поведения реальных систем. Построенные имитационные модели систем массового обслуживания могут применяться для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реальных систем обслуживания. Методы имитационного моделирования позволяют собрать необходимую информацию о поведении системы с помощью создания ее компьютеризованной модели. Эта информация так же используется далее для проектирования системы.

Целью бакалаврской работы является моделирование и анализ систем массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и различной (экспоненциальной, нормальной,постоянной) длительностью их обслуживания.

Объект исследования система массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и различной длительностью их обслуживания.

Предмет исследования обслуживание заявок поступающих в систему массового обслуживания с ожиданием.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие задачи:

— определить основные понятия, связанные с системами массового обслуживания;

— рассмотреть систему массового обслуживания с произвольным распределением длительности их обслуживания;
— построить модель системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и различной длительностью их обслуживания;
— рассчитать основные практические и теоретические характеристики данной системы;
— провести сравнительный анализ практических и теоретических характеристик.

Практическая значимость проводимого исследования состоит в том, что на основании построенной компьютеризированной модели системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и различной длительностью их обслуживания можно проводить исследования реально существующих обслуживающих систем, рассчитывать экономические характеристики эффективности функционирования этих систем. По результатам этих вычислений можно делать выводы о состоятельности и эффективности предприятий.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников, состоящего из 20 наименований, и трех приложений.Общий объем работы составляет 54 страницы, включая 3 таблицы и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В первом разделе рассмотрены основные понятия теории массового обслуживания. Система массового обслуживания (СМО) производит обслуживание требований, поступающих в нее из источника требований и возвращающихся после обслуживания в источник. Обслуживание требований в системе производится обслуживающими приборами. Система может содержать от одного до бесконечного числа приборов. Система массового обслуживания,содержащая один прибор, называется однолинейной, система, содержащая не менее двух приборов, многолинейной.

В зависимости от реализации в системе возможности ожидания поступившими требованиями их обслуживания системы массового обслуживания делятся на три типа:

1) системы с потерями, в которых требования, не нашедшие в момент поступления ни одного свободного прибора, теряются (возвращаются в источник без обслуживания);

2) системы с ожиданием, в которых возможно ожидание любого числа требований, при этом ожидающие требования образуют очередь, длина которой не ограничена;

3) системы с ожиданием и ограничениями, в которых допускается возможность образования очереди ограниченной длины. При этом требования, поступившие в систему, когда отсутствуют свободные места для ожидания в очереди, теряются (возвращаются в источник без обслуживания).
В системах с ожиданием очередь в общем случае может иметь сложную структуру, являясь некоторым набором очередей. Выбор очередного требования из очереди на обслуживание производится с помощью некоторой дисциплины обслуживания. Дисциплина обслуживания заключается в правиле постановки заявок в очередь и порядке их выбора из очереди на обслуживание, распределении приборов между заявками.

Случайная последовательность требований, которые поступают в систему обслуживания и которые необходимо обслужить, называется потоком требований.

Пуассоновские потоки на практике встречаются очень часто, так как к их образованию приводит суммирование случайных потоков с большими интервалами времени между поступлением требований. Пуассоновский поток выделяется особо не только из-за его простоты, но и потому, что при суммировании пуассоновских потоков результирующий поток также будет пуассоновским.

Параметры и характеристики систем обслуживания. Системы обслуживания характеризуются пятью величинами:

$$A/S/k/B/Z.$$

Буква A характеризует поток требований. В работе рассмотрены только $A = M(Markov)$ – пуассоновский поток требований. Буква S характеризует случайные последовательности длительностей обслуживания на отдельных приборах обслуживания. Будем рассматривать только $S = G$ – последовательность одинаково распределенных длительностей обслуживания, распределение произвольное . Буква k обозначает число обслуживающих приборов в СМО. Буква B - число мест для ожидания в очереди (маскимальная длина очереди). Значение $B = 0$ характеризует систему с потерями, значение $0 \leqslant B \leqslant \infty$ - комбинированную систему с ожиданием и потерями, а $B = \infty$ - чистую систему с ожиданием, то есть бесконечным числом мест для ожидания. Буква Z указывает число источников требований. При рассмотрении конкретной системы обслуживания всегда предполагается, что потоки требований стохастически независимы от последовательности интервалов обслуживания.

В системах массового обслуживания используются следующие обозначения: λ - интенсивность входящего потока требований;

μ - интенсивность обслуживания требований одним прибором;

κ - число приборов в системе;

ρ - коэффициент использования обслуживающих приборов системы;

n - число требований в СМО;

$\overline{n}$ - математическое ожидание (м. о.) числа требований в СМО;

b - число требований в очереди СМО;

$\overline{b}$ - м.о числа требований в очереди;

$\overline{g}$ - м.о числа свободных приборов в СМО;

$\overline{h}$ - м.о числа занятых приборов в СМО;

$\overline{u}$ - м.о длительности пребывания требований в СМО;

$\overline{\nu}$ - м.о длительности обслуживания требования прибором, $\overline{\nu} = \dfrac{1}{\mu}$;

$\overline{w}$ - м.о длительности пребывания требований в очереди (времени ожидания);

Z - число источников требований в замкнутой СМО;

B - максимальное число требований, которые могут находиться в очереди;

p_n - стационарная вероятность пребывания в СМО точно n требований.

Основными числовыми характеристиками для стационарного режима СМО,где V - общее число требований в источниках до начала работы СМО; V может быть конечным или бесконечным, являются:

$\overline{n} = \sum\limits_{n=0}^{V} np_n$ - м.о. числа требований в СМО;

$\overline{b} = \sum\limits_{n=k+1}^{V} (n-\kappa)p_n$- м.о. числа требований в очереди;

$\overline{g} = \sum\limits_{n=0}^{\kappa} (\kappa - n)p_n$ -м.о. числа свободных приборов в СМО;

$\overline{h} = \sum\limits_{n=0}^{\kappa} np_n + \kappa \sum\limits_{n=\kappa+1}^{V} p_n$ - м.о. числа занятых приборов в СМО.

Также имеют место соотношения:

$$\overline{h} + \overline{g} = \kappa, \quad \overline{h} + \overline{b} = \overline{n}, \quad \overline{\nu} + \overline{w} = \overline{u}.$$

Известен *закон сохранения среднего потока требований*, согласно которому в *стационарном режиме СМО интенсивность выходящего потока равна интенсивности входящего потока.*

Большое значение для исследования открытых систем, когда входящие требования независимы от выходящих, имеет формула Литтла: $\overline{n} = \lambda\overline{u}$ или $\overline{b} = \lambda\overline{w}$.

Система обслуживания типа $M/G/1$. Эволюция системы массового обслуживания типа $M/G/1$ описывается немарковским случайным процессом. Для анализа этой системы используется метод вложенных цепей Маркова, разработанный Пальмом и Кендаллом. Входящий поток требований в систему является пуассоновским с функцией распределения длительности интервалов времени между последовательными требованиями

$$F(t) = 1 - exp(-\lambda t), \quad t \geq 0$$

В системе используется дисциплина обслуживания $FCFS$.

Матрица переходов $P = [p_{ij}](i, j = 0, 1, 2, ...)$ имеет следующий вид:

$$
P = \begin{bmatrix}
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & . & . \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & . & . \\
0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & . & . & . \\
0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \alpha_0 & . & . & . \\
. & . & . & . & & & \\
. & . & . & . & & & \\
. & . & . & . & & &
\end{bmatrix},
$$

где $\alpha_k \stackrel{def}{=} P(v_{n+1} = k)$.

Формула Полячека — Хинчина, позволяющая вычислить среднее число требований в системе типа $M/G/1$ имеет вид

$$
\overline{q} = \rho + \rho^2 \frac{(1 + C_b^2)}{2(1 - \rho)}.
$$

Величины $\overline{n}$ для среднего числа требований в системе и $\overline{b}$ для среднего числа требований в очереди (не считая обслуживаемого требования) связаны соотношением

$$
\overline{b} = \overline{n} - \rho. \tag{1}
$$

Ожидаемое число требований, остающихся при уходе обслуженного требования для системы $M/M/1$:

$$
\overline{q} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \tag{2}
$$

Для системы $M/D/1$:

$$
\overline{q} = \frac{\rho}{(1 - \rho)} - \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}.
$$

Таким образом система типа $M/D/1$ в среднем содержит на $\rho^2/2(1-\rho)$ требований меньше, чем система $M/M/1$.

Известно, что $\overline{q}$ описывает также среднее число требований в случайный момент времени, поэтому можно записать $\overline{q} = \overline{n}$. К этому среднему значению можно применить результат Литтла и получить среднее время, проведенное требованием в системе (очередь плюс обслуживание). Таким образом,

$$\overline{n} = \rho + \rho^2 \frac{(1 + C_b^2)}{2(1 - \rho)} = \lambda \overline{u}.$$

Решая относительно $\overline{u}$, получаем среднее время пребывания требования в системе

$$\overline{u} = \overline{x} + \frac{\rho \overline{x}(1 + C_b^2)}{2(1 - \rho)}. \tag{3}$$

Среднее время пребывания в очереди

$$\overline{w} = \frac{\rho \overline{x}(1 + C_b^2)}{2(1 - \rho)},$$

или

$$\overline{w} = \frac{\overline{w}_0}{1 - \rho}, \tag{4}$$

где $\overline{w}_0 \overset{def}{=} \lambda \overline{x^2}/2$ — это среднее остаточное время обслуживания для требования (если такое есть), находящегося в обслуживающем приборе в момент поступления нового требования (последняя формула может быть получена из общей формулы для среднего остаточного времени).

$$\frac{\overline{w}}{\overline{x}} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \ \mathbf{M/M/1}; \tag{5}$$

$$\frac{\overline{w}}{\overline{x}} = \frac{\rho}{2(1 - \rho)}, \ \mathbf{M/D/1}. \tag{6}$$

Заметим, что система с регулярным обслуживанием ($M/D/1$) характеризуется средним временем ожидания вдвое меньшим, чем система с показательным обслуживанием ($M/M/1$). Это закономерно, так как время пребывания в системе, так же, как и число требований в системе, пропорционально дисперсии времени обслуживания.

Третий раздел посвящен принципам построения имитационных моделей систем массового обслуживания. Имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы. Таким образом, процесс имитационного моделирования это процесс, включающий и конструирование модели, и аналитическое применение модели для изучения некоторой проблемы.

Система $\hat{S}$ состоит из объектов: источник требований, очередь требований системы обслуживания, прибор системы обслуживания, требование. Объектам системы $\hat{S}$ ставятся в соответствие объекты имитационной модели.

Требования. В общем случае требования представляют собой перемещаемые по системе объекты, различающиеся классом, приоритетом, номером и другими параметрами. Из всего набора параметров требования реальной системы в модели необходимо отобразить только те, которые способствуют достижению цели моделирования. Необходимы следующие атрибуты требования модели: момент поступления требования t_n в очередь системы из источника, момент начала обслуживания требования t_{nac}, момент завершения обслуживания требования t_{zav}.

Разность моментов t_{zav} и t_{nac} определяет длительность пребывания требования в системе обслуживания, а разность моментов t_{nac} и t_n - длительность ожидания требования в очереди системы обслуживания. Для получения статистически значимых оценок характеристик u и b потребуется определенное число обслуженных требований. Их хранение в модели организуется следующим образом.

Прибор, завершив обслуживание требования, будет направлять его не в источник, а в специально организованную очередь обслуженных требований Q_{obsl}. Тогда признаком окончания эксперимента с имитационной моделью будет достижение заранее определенного числа обслуженных требований в очереди Q_{obsl}.

Очереди. Очереди являются самостоятельными объектами имитационных моделей систем обслуживания и служат для хранения требований, ожидающих обработки. Основным набором характеристик очереди являются: максимальное число требований в очереди, дисциплина установления требований в очередь и выбора их из очереди, приоритет требований, которым разрешается пребывать в очереди. В рассматриваемом случае имитационная модель системы $\hat{S}$ содержит очередь Q требований, ожидающих обслуживания, и очередь Q_{obsl} обслуженных требований.

Модельное время в имитационной модели представлено глобальной переменной вещественного типа, принимающей значения на интервале $[0, \infty)$ и обеспечивающей имитацию параллельного развития процессов системы $\hat{S}$.

Событие - мгновенное изменение состояния модели системы $\hat{S}$. В имитационной модели различаются события трех типов: поступление требования в систему массового обслуживания, начало обслуживания требования прибором системы обслуживания и уход требования из системы массового обслуживания после завершения обслуживания.

Процесс функционирования системы $\hat{S}$ в имитационной модели представляется в виде логически связанной последовательности событий на оси модельного времени. Эта последовательность характеризуется интервалами времени между событиями и типом событий.

В четвертом разделе построенна модель системы массового обслуживания типа $M/G/1$.В данную систему поступает поток заявок, имеющий пуассоновское распределение с параметром λ, длительность обслуживания заявок имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. В системе имеется 1 работающий обслуживающий прибор. Если в момент поступления очередной заявки в системе уже находится одна и более заявок, то эта заявка помещается в очередь и ждет начала обслуживания. Дисциплина обслуживания $FCFS$. Вместимость системы не ограничена. Емкость источника бесконечна.

Требуется определить следующие характеристики работы системы:

1) $\widetilde{\rho}$ - коэффициент использования системы;

2) $\widetilde{b}$ – среднее число заявок в очереди;

3) $\widetilde{w}$ - среднее время ожидания в очереди;

4) $\widetilde{u}$ - среднее время пребывания заявки в системе.

Для нахождения указанных характеристик в программе Matlab была написана программа, моделирующая работу данной системы (описание программы,листинг и результаты программы представлены в приложениях А и Б соответственно).

Входными данными программы являются следующие: λ, μ.

Выходными данными программы являются следующие: количество обслуженных прибором требований ; суммарное время обслуживания прибором; суммарное время нахождения требований в очереди и вообще в системе; $\widetilde{\rho}$ - коэффициент использования системы; $\widetilde{b}$ - среднее число требований в очереди; $\widetilde{w}$ - среднее время ожидания в очереди (в часах); $\widetilde{u}$ - среднее время пребывания требования в системе (в часах).

Коэффициент использования (загрузки) системы считается по формуле:

$$\widetilde{\rho} = \frac{\text{суммарное время обслуживания}}{\text{время моделирования}}.$$

Среднее число заявок в очереди (в часах) считается по формуле:

$$\widetilde{b} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{время моделирования}}.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди (в часах) считается по формуле:

$$\widetilde{w} = \frac{\text{суммарное время ожидания в очереди}}{\text{количество заявок}}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе (в часах):

$$\widetilde{u} = \frac{\text{суммарное время пребывания заявок в системе}}{\text{количество заявок}}.$$

Для оценки полученных характеристик в программе были введены формулы, рассчитывающие те же параметры с использованием теоретических результатов раздела 2.

Проведен сравнительный анализ полученных практических и теоретических результатов (таблица 1). На основании результатов таблицы 1 видно, что при увеличении числа требований характеристики системы, полученные на основе дискретной модели, отличаются от соответствующих характеристик, полученных на основе теоретических формул, менее чем на 5 %.Если сравнивать характеристики, полученные на основе дискретной модели, для $n = 100$ с соответствующими характеристиками, полученными на основе теоретических формул, то видно, что они отличаются более чем на 30%. Это говорит о том, что при небольшом числе требований, система не успевает достичь стационарного режима поэтому разница между соответствующими характеристиками существенна.

Таблица 1 – Характеристики системы $M/G/1$

Характеристики	Расчет на основании дискретной модели	Расчет на основании теоретических формул
	$\lambda = 3$, $\mu = 4$, $n = 100000$	$\lambda = 3$, $\mu = 4$
коэффициент использования системы	$\widetilde{\rho}_M = 0.75086$, $\widetilde{\rho}_N = 0.74848$, $\widetilde{\rho}_D = 0.74996$	$\rho = 0.75000$
среднее время ожидания в очереди	$\widetilde{w}_M = 0.77132$, $\widetilde{w}_N = 0.72544$, $\widetilde{w}_D = 0.37340$	$\overline{w}_M = 0.75000$, $\overline{w}_N = 0.75000$, $\overline{w}_D = 0.37500$
среднее время пребывания требования в системе	$\widetilde{u}_M = 1.0216$, $\widetilde{u}_N = 0.97496$, $\widetilde{u}_D = 0.62340$	$\overline{u}_M = 1$, $\overline{u}_N = 1$, $\overline{u}_D = 0.62500$
среднее число требований в очереди	$\widetilde{b}_M = 2.3138$, $\widetilde{b}_N = 2.1762$, $\widetilde{b}_D = 1.1201$	$\bar{b}_M = 2.2500$, $\bar{b}_N = 2.2500$, $\bar{b}_D = 1.1250$
	$\lambda = 5$, $\mu = 8$, $n = 100000$	$\lambda = 5, \mu = 8$
коэффициент использования системы	$\widetilde{\rho}_M = 0.61936$, $\widetilde{\rho}_N = 0.62120$, $\widetilde{\rho}_D = 0.62251$	$\rho = 0.62500$
среднее время ожидания в очереди	$\widetilde{w}_M = 0.20201$, $\widetilde{w}_N = 0.20720$, $\widetilde{w}_D = 0.10590$	$\overline{w}_M = 0.20833$, $\overline{w}_N = 0.20833$, $\overline{w}_D = 0.10417$
среднее время пребывания требования в системе	$\widetilde{u}_M = 0.32638$, $\widetilde{u}_N = 0.33194$, $\widetilde{u}_D = 0.23090$	$\overline{u}_M = 0.33333$, $\overline{u}_N = 0.33333$, $\overline{u}_D = 0.22917$
среднее число требований в очереди	$\widetilde{b}_M = 1.0060$, $\widetilde{b}_N = 1.0319$, $\widetilde{b}_D = 0.52737$	$\bar{b}_M = 1.0417$, $\bar{b}_N = 1.0417$, $\bar{b}_D = 0.52083$

Если сравнивать полученные характеристики с точки зрения закона распределения времени обслуживания, то можно увидеть, что коэффициент использования системы примерно одинаковые для всех трех распределений (таблица 1), а среднее время проведенное требованием в очереди или в системе для постоянного времени обслуживания требований в два раза меньше чем для экспоненциального и нормального распределений. Это подтверждает теоретические рассуждения, что говорит о правильности построения имитационной модели. С точки зрения требований выгоднее, чтобы обслуживание было постоянной величиной. Хотя на практике, наверное, этого добиться практически невозможно.

В результате, полученная модель полностью имитирует работу рассмотренной системы массового обслуживания, и в дальнейшем может быть применена для расчета экономических характеристик эффективности функционирования реально существующих систем массового обслуживания.

В заключении описаны результаты проделанной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Определены основные понятия, связанные с системами массового обслуживания. Изучены системы обслуживания с ожиданием с пуассоновским входящим потоком заявок и различной длительностью их обслуживания.

2. Изучены принципы и алгоритмы построения имитационной модели систем массового обслуживания.

3. Построена математическая модель изученной системы массового обслуживания. Разработана программа, моделирующая работу такой системы, и позволяющая вычислять основные характеристики системы. Программный код и результаты работы программы приводятся в приложении Б. Так же разработана программа, позволяющая вычислять основные характеристики системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновскими входящим потоком требований и различной длительностью их обслуживания на основе теоретических формул. Текст программы и результат работы программы приводятся в приложении В. Рассмотрен конкретный пример системы массового обслуживания с пуассоновскими входящим и выходящим потоками требований с одним обслуживающими прибором.

4. Вычислены основные характеристики системы массового обслуживания с ожиданием с пуассоновскими входящим потоком требований и различной длительность их обслуживания на основе дискретной модели и на основе теоретических формул для одних и тех же входных параметров. Проведен сравнительный анализ практических и теоретических характеристик.