МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

ФОРМИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Карабанова Александра Алексеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ И. А. Кузнецова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Вопрос о том, как приумножить деньги или хотя бы не потерять их стоит всегда. Более глобально, каждое государство пытается увеличить свой капитал и инвестиции играют далеко не последнюю роль. В связи с этим раскрытие данной темы, с новой стороны или более понятной старой, несёт свой вклад и является полезным.

Цель бакалаврской работы является исследование и программная реализация методов, которые используются для формирования и оптимизации портфеля ценных бумаг.

Объект исследования - портфель ценных бумаг.

Предмет исследования - результаты методов формирования и оптимизации инвестиционных портфелей с целью выявления оптимального.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие **задачи**:

— исследовать основные теоретические предпосылки формирования портфеля ценных бумаг;
— провести обзор методик портфельного инвестирования;
— выбрать методику для практического применения;
— разработать приложение для составления оптимального портфеля ценных бумаг.

Практическая значимость проводимой работы состоит в том, что полученный результат данного исследования объясняет эффективность тех или иных операций с активами.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 21 наименование, и четырех приложений. Общий объём работы составляет 60 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе приводятся основные понятия, используемые в теории портфельного инвестирования.

Общее понятие экономического риска можно сформулировать следующим образом: риск - это возможность случайного возникновения нежелательных убытков или потери лицом или организацией части своих ресурсов, части своих доходов, или появления дополнительных расходов.

При таком подходе, если ситуация позволяет его использовать, риск измеряется с помощью дисперсии или среднеквадратического отклонения случайной величины показателя эффективности принимаемого решения от ожидаемого.

Пусть в результате выполнения некоторой финансовой операции возможны n исходов с вероятностями возникновения p_i и доходностями q_i, $i = \overline{1,n}$. Таким образом, доход от финансовой операции является случайной величиной R. Ее средний ожидаемый доход, то есть математическое ожидание случайной величины R, есть

$$M[R] = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n. \tag{1}$$

Дисперсия случайной величины R есть

$$D[R] = M[(R - m_R)^2]. \tag{2}$$

Риском данной операции будем называть среднеквадратическое отклонение случайной величины R

$$\sigma_R = \sqrt{D[R]}. \tag{3}$$

Диверсификация капитала, то есть его распределение в различные финансовые операции, является самым распространенным способом снижения риска в инвестиционном деле.

Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$- некоторые финансовые операции, требующие одинаковых вложений, случайные величины доходности $\{R_i\}_{i=\overline{1,n}}$ ведут себя независимо. Обозначим через $\{m_i\}_{i=\overline{1,n}}$ и $\{\sigma_i\}_{i=\overline{1,n}}$ - соответствующие значения ожидаемой доходности и риска этих операций. ЛПР, распределив свой капитал, достаточный для финансирования только одной операции, в равных долях в финансирование всех операций, получает впоследствии соответствующую часть дохода от каждой операции. Случайная величина доходности от такого способа вложения есть

$$R = \frac{R_1}{n} + \frac{R_2}{n} + \ldots + \frac{R_n}{n}, \tag{4}$$

и её ожидаемая доходность является средним арифметическим от ожидаемых доходностей всех операций $m = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)/n$. Тогда дисперсия случайной величины R, учитывая независимость случайных величин R_i и R_j, есть

$$\begin{gathered} D[R] = M[(R-m)^2] = n^{-2} M[(\sum_{i=1}^{n} R_i - \sum_{i=1}^{n} m_i)^2] = \\ = n^{-2} M[(\sum_{i=1}^{n} R_i - m_i)^2] = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] = \\ = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} M[(R_i - m_i)^2] = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i)^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Отсюда, если обозначим через σ^* максимальное значение $\{\sigma_i\}_{i=\overline{1,n}}$, вытекает, что риск операции можно оценить как

$$\sigma = \sqrt{D[R]} \leq \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}. \tag{6}$$

Таким образом, получаем важный вывод: при увеличении числа независимых финансовых операций ожидаемая доходность сконструированной нами операции находится на уровне среднего арифметического значения ожидаемых доходностей всех операций, а её риск уменьшается, становясь сколь угодно малым числом при достаточно больших n. Данный эффект называется диверсификации.

Во **втором** разделе описано формирование портфеля ценных бумаг на основе показателей доходности и риска.

Выбор портфеля ценных бумаг на основе учёта его ожидаемой доходности и риска известен как подход «доходность - риск», который впервые был сформулирован Гарри Марковицем.

В рамках данного подхода предполагается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности посредством диверсификации вложений.

Используется следующие предположения относительно предпочтений инвестора:

1) о «ненасыщаемости» инвестора: при выборе из двух идентичных во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелей инвестор выбирает портфель с большей ожидаемой доходности;

2) о том, что инвестор избегает риска: при выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей он предпочитает портфель с меньшим риском.

Пусть R_i - случайная величина доходности ценных бумаг i-го вида, как если бы весь капитал инвестора был бы целиком вложен в их покупку, $i = \overline{1, n}$. Тогда случайная величина R_p доходности портфеля со структурой, задаваемой вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, есть очевидно

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i. \tag{7}$$

Следовательно, ожидаемая доходность такого портфеля соответствует формуле

$$m_p = M[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i M[R_i] = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \tag{8}$$

где $m_i = M[R_i]$ - ожидаемая доходность от ценных бумаг i-го вида, если бы в них вложили весь капитал.

Отклонение случайной величины доходности портфеля от ожидаемой доходности есть случайная величина

$$R_p - m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i (R_i - m_i). \tag{9}$$

Теперь можно выразить математическое ожидание квадрата этого отклонения, то есть дисперсию случайной величины R_p

$$D_p = M[(R_p - m_p)^2] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j, \tag{10}$$

где величины $V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ являются ковариациями случайных величин R_i и R_j. Очевидно, что значения

$$V_{ii} = M[(R_I - m_j)^2] = (\sigma_i)^2 \tag{11}$$

являются дисперсиями случайных величин R_i, а σ_i - соответствующие среднеквадратические отклонения - риск i-х ценных бумаг.

Модель Марковица

Предположения, при которых будет поставлена задача о формировании портфеля ценных бумаг с точки зрения подхода «доходность - риск», состоят в следующем.

М.1. Инвесторы осуществляют оценку портфелей, основываясь на ожидаемой доходности и риске активов.

М.2. При выборе из двух идентичных во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелей инвестор выбирает портфель с большей ожидаемой доходностью.

М.3. При выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей инвестор предпочитает портфель с меньшим риском.

М.4. Характеристики активов и портфеля относятся к одному заданному периоду владения.

М.5. Активы являются бесконечно делимыми, то есть в каждый актив может быть вложена любая доля капитала инвестора.

М.6. Отсутствуют какие-либо технические препятствия в реализации оптимальных инвестиционных стратегий; относительно любого актива возможна операция «короткая продажа»; налоги и издержки, связанные с покупкой и продажей активов, не принимаются во внимание.

Задача заключается в отыскании структуры $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ портфеля, которая обеспечила бы достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальным риском. С учетом формул (8), (10) математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{gathered} D_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij} \to \min x, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = m_p. \end{gathered} \tag{12}$$

Если примем обозначение $I = (1, 1, \ldots, 1)^T \in R^n$, то задачу (12) можно переписать в матичной форме:

$$D_p = x^T V x \to \min x,\ I^T x = 1,\ m^T x = m_p. \tag{13}$$

Соотношения (13) представляют собой формализованное описание задачи отыскания оптимального, в смысле подхода «доходность - риск», портфеля рисковых ценных бумаг, которая известна как задача Марковица.

Уровневая функция полезности инвестора

Функцией полезности инвестора называется некоторая функция $U(m, \sigma)$ с помощью которой он может анализировать варианты, причём предпочтения отдается варианту с большим значением этой функции. При существовании такой зависимости эквивалентные варианты будут определяться из уравнения:

$$U(m, \sigma) = C. \tag{14}$$

Это уравнение неявным образом задает σ как функцию m при фиксированной правой части C. График этой функции соединяет все точки данного уровня полезности и называется кривой безразличия уровня C. Для различных значений уровня получим карту кривых безразличия, и задача инвестора будет состоять в том, чтобы, исходя из своих бюджетных возможностей, подобраться к кривой безразличия с максимально возможным уровнем C.

Также в этом разделе рассмотрены модели Тобина, Шарпа и и модель финансовых активов CAPM.

В **четвертом** разделе описано написанное приложение с помощью которого можно сформировать оптимальный портфель инвестиций. Приложение написано на языке C#. В основе главного окна программы - список акций, из которых пользователь может выбрать те, которые его интересуют, представлено на рисунке 1. Всего в приложении представлено 100 акций. Их можно сортировать по волатильности, капитализации, ликвидности и дивидендной доходности.

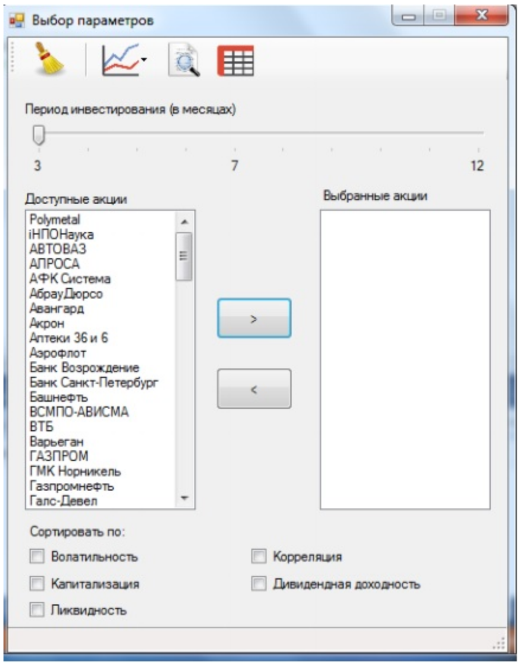

Рисунок 1 – Главное окно приложения

Все расчеты для акций производятся на основании данных котировок за прошлые периоды. Экспорт данных происходит непосредственно перед их использованием, с сайта «finam.ru».

При запуске приложения список всех акций считывается из текстового файла, который находится в папке с приложением. При желании пользователь может добавить интересующие его акции в приложение, отредактировав файл. Акции в файле записаны в формате «Название, Тикер, Номер для загрузки».

Пользователь может выбрать период, на который планируется инвестирование, с помощью элемента trackBar. Период задается в месяцах и может иметь значение от 3 до 12. От него зависит, за какой промежуток времени будут использоваться данные при расчете границы эффективных портфелей, корреляции и волатильности. Данные берутся с шагом в неделю.

Выбранные пользователем акции можно использовать следующим образом:

1. Построение эффективной границы портфелей;
2. Тестирование портфелей на данных прошлых лет;
3. Расчет корреляции активов.

Построение эффективной границы

Эффективная граница - множество портфелей с лучшими характеристиками, из которого инвестор выбирает оптимальный для себя. Для ее построения многократно решается задача минимизации риска при заданной доходности. Интервал и шаг для доходности задаются автоматически, но при необходимости пользователь может изменить их. Масштаб можно увеличить, выделив нужную область на графике. Для увеличения шага можно воспользоваться соответствующими кнопками под графиком. Минимальный шаг - 0,001%, максимальный шаг - 10%. Пример результата показан на рисунке 2.

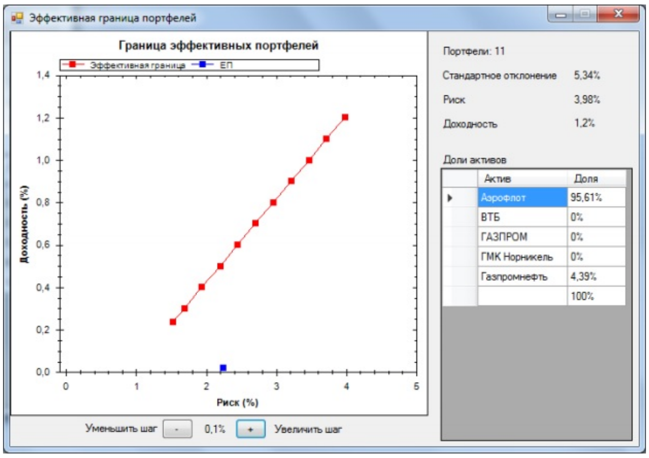

Рисунок 2 – Эффективная граница портфелей

Тестирование портфелей

Приложение позволяет построить портфели по данным прошлых лет (2009 - 2015 года) и проследить, как они себя вели в следующем году. Это помогает понять, насколько точна и эффективна используемая модель оптимизации портфелей активов.

Для выбранного портфеля отображаются его состав (доля каждого актива), реальная доходность и максимальная просадка, рассчитанные по данным следующего года. Максимальная просадка - самые большие потери относительно предыдущего максимума стоимости, выраженные в процентах. Также для портфеля отображается график его стоимости за год по неделям. Кроме того, пользователь имеет возможность просмотреть аналогичные характеристики российского индекса ММВБ и единичного портфеля за тот же период, что и у выбранного портфеля (см. рисунок 3). Это позволяет сравнить динамику портфеля активов, индекса и единичного портфеля.

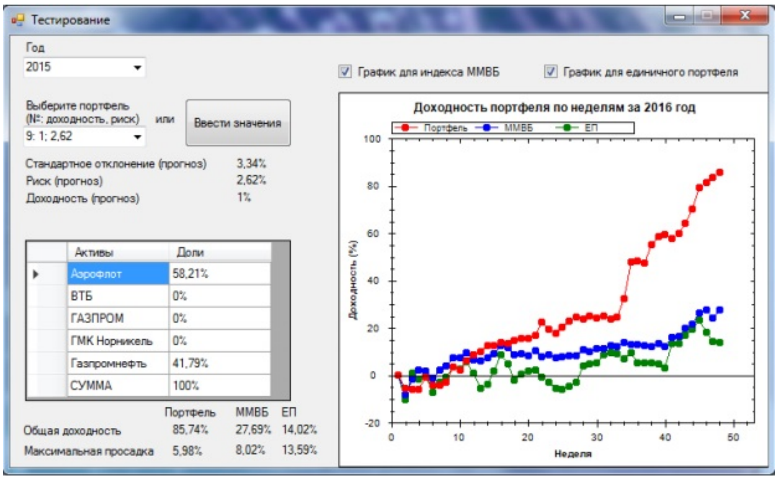

Рисунок 3 – Тестирование модели

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. Определены основные понятия, необходимые для описания портфеля ценных бумаг.

2. Рассмотрены модели построения оптимального портфеля: модель Марковица, Шарпа и тд.

3. Разработана программа, которая позволяет посмотреть корреляцию активов, корреляцию актива и портфеля, построен график эффективных портфелей, построен оптимальный портфель ценных бумаг.

4. В приложениях приведены результаты работы.