МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

Установившийся ламинарный конвективный пограничный слой вблизи передней критической точки затупленного тела

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 413 группы
направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Данилкина Артема Юрьевича

Научный руководитель
старший преподователь В.С. Кожанов

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент Ю.А. Блинков

Саратов 2019

Введение. На то обстоятельство, что прилипание жидкости может оказать существенное влияние на характер течения и его закономерности, указано еще в гидродинамике Д. Бернулли. В работах Навье, Пуассона и Стокса также имеются указания на то, что в связи с учетом вязкости жидкости должны измениться граничные условия вблизи стенок. Но эти указания все еще не давали основания к утверждению того, что вязкость жидкости проявляется главным образом только вблизи твердых стенок.

Идея о преобладающем влиянии вязкости жидкости только вблизи стенок была высказана позднее, а именно в работе Д.И. Менделеева, а затем в лекциях Н.Е. Жуковского. Оформление в виде уравнений эта идея получила в работе Прандтля.

Л.Прандтлю удалось объединить гидромеханику и гидравлику, указав на важность вязкости жидкости при ее движении. Идея вязкости о влиянии жидкости вблизи стенок получила оформление в виде уравнений в трудах Прандтля.

Введение пограничного слоя позволяет существенно упростить моделирующие течение жидкости; газа уравнения путем разделения потока на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать.

Данная гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением.

Теория пограничного слоя широко используется в авиастроении и судостроении. Именно теория сопротивления трению при движении летательного аппарата или судна характеризует внешний облик данных объектов, что существенно сказывается на стадии проектирования летательного аппарата и судна в целом.

Целью работы является изучение задачи об обтекации затупленного тела вязкой несжимаемой жидкостью. Задана система уравнений, описывающая течение в температурном пограничном слое с граничными условиями на поверхности тела и вдали от тела.

В первом разделе производится физическая постановка задачи и приводится схема изучаемого течения вблизи поверхности тела.

В первом подразделе второго раздела выполняетя постановка задачи, формулируется система уравнений и граничные условия, описывающие течение в пограничном слое.

Во втором подразделе второго раздела осуществляется переход к автомодельным переменным и формулируется краевая задача в автомодельных переменных.

В третьем подразделе второго раздела рассматривается алгоритм численного решения и приводится его блок-схема.

В четвертом подразделе второго раздела представленны результаты расчетов в виде графиков для продольной и поперечной составляющих скорости течения в пограничном слое при различных значениях параметров характеризующих течение.

В первом подразделе третьего раздела выполняется постановка задачи, формулируется система уравнений и граничные условия, описывающие течение в пограничном слое.

Во втором подразделе третьего раздела осуществляется переход к автомодельным переменным и формулируется краевая задача в автомодельных переменных.

В третьем подразделе третьего раздела представленны результаты расчетов в виде графиков для продольной и поперечной составляющих скорости течения в пограничном слое при различных значениях параметров характеризующих течение.

Описание физического явления. Физическая постановка задачи. На затупленное тело набегает поток вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости. На поверхности тела поддерживается переменая температура $T = T_\infty + Bx^k (B = const, k = const)$. Вследсвии вязкости жидкости она «прилипает» к поверхности тела, то есть на стенке продольная составляющая скорости жидкости равна нулю. Также равна нулю поперечная составляющая скорости. Разрыв продольной составляющей скорости в вязкой жидкости существовать не может, поэтому возникает переходная область течения, то есть пограничный слой, в котором происходит плавное изменение скорости от нуля на стенке до некоторого конечного значения во внешнем потоке, где влияние вязкости исчезает. Поместим начало декартовой системы координат в произвольной точке. Ось Ox направим вдоль поверхности тела вправо, ось Oy направим перпендикулярно телу вверх. Вдоль оси Oz течение будет считаться неограниченным, поэтому от координаты z решение зависеть не будет. При этом пограничный слой показан сплошной линией. Требуется изучить поля скорости и температуры в пограничном слое при различных значениях параметров набегающих потоков.

Случай ньютоновских сред. Постановка задачи. Когда жидкость, окружающая тело, является обычной ньютоновской несжимаемой жидкостью, течение в температурном пограничном слое при условии пренебрежения теплом, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (T - T_\infty) a x, \tag{2}$$

$$c\rho \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + \nu\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{3}$$

В правую часть уравнения изменения энергии (2.3) не входит слагаемое $\mu \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} \right)^2$, поскольку теплом, которое выделяется в следствии работы сил вязкости, пренебрегается. Граничные условия на поверхности тела имеют вид при

$$y = 0\colon u = 0, T = T + T_\infty + Bx^k (B = const, k = const). \tag{4}$$

Граничные условия вдали от тела («на бесконечности») имеют вид при

$$y \to \infty\colon u \to 0, T \to T_\infty. \tag{5}$$

Мы получили краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (2.1)-(2.3) с граничными условиями (2.4), (2.5). Условие при $x = 0$ не требуется, потому что задача оказывается автомодельной.

Постановка краевой задачи в автомодельных переменных. Введём масштабные величины. Обозначим через L - масштаб длины в направлении оси x, через Y - масштаб длины в направлении оси y, через U - масштаб скорости в направлении оси x, через V - масштаб скорости в направлении оси Y. Тогда можно ввести безразмерные переменные по следующим формулам:

$$x = L\bar{x}, y = Y\bar{y}, \tag{6}$$

$$u = U\bar{u}, y = \nu\bar{\nu}, \tag{7}$$

$$T = T_\infty + BL^k\bar{T}. \tag{8}$$

Перейдём в уравнении (2.1) к безразмерным переменным. Для этого подставим (2.6), (2.7) в (2.1):

$$\frac{U}{L} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{V}{Y} \cdot \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \bar{y}} = 0. \tag{9}$$

Масштабы в 1-ом и 2-ом слагаемых (2.9) должны совпадать, т.е.

$$\frac{U}{L} = \frac{V}{Y},$$

следовательно,

$$V = \frac{V}{Y}U. \tag{10}$$

Перейдем в уравнении (2.2) к безразмерным переменным. Для этого подставим (2.6), (2.7) в (2.2) и учтём (2.10):

$$\frac{U^2}{L} \cdot \left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{\mu}{\rho}\frac{U}{Y^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y^2}} + \rho g \beta L^{k+1}\bar{T}a\bar{x}. \tag{11}$$

Масштабы во всех слагаемых (2.11) слева и справа должны совпадать, т.е.

$$\frac{U^2}{L} = \frac{\mu}{\rho}\frac{U}{Y^2} = \nu\frac{U}{Y^2}, \frac{U^2}{L} = g\beta BL^{k+1}a.$$

Из последних двух соотношений для масштабов Y и U получаем

$$Y = \left(\frac{\nu^2}{g\beta BL^k a}\right)^{1/4}, U = (g\beta BL^{k+1}a)^{1/2}. \tag{12}$$

Введём в рассмотрение функцию тока $\psi = \psi(x, y)$. Она вводится с помощью уравнения неразрывности (2.1) и обращает его в тождество:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \nu = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{13}$$

Для функции тока введём масштаб Ψ по формуле

$$\psi = \Psi\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{14}$$

Найдем масштаб функции тока Ψ. Для этого подставим (2.6), (2.7) и (2.14) в 1-ое уравнение (2.13):

$$U\bar{u} = \frac{\Psi}{Y}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{y}}.$$

Следовательно,

$$\Psi = YU = \left(\frac{\nu^2}{g\beta BL^k a}\right)^{1/4}(g\beta BL^{k+1}a)^{1/2} = (\nu^2 g\beta BL^{k+4}a)^{1/4}. \tag{15}$$

Перепишем (2.14) с учетом (2.6), (2.12) и (2.15):

$$\psi = (\nu^2 g\beta BL^{k+4}a)^{1/4}\cdot\bar{\psi}\left(\frac{x}{L}, y\left(\frac{g\beta BL^k a}{\nu^2}\right)^{1/4}\right). \tag{16}$$

Проведем ряд тождественных преобразований, которые позволят уменьшить присутствие масштаба L в функции тока ψ:

$$\psi = (\nu^2 g\beta BL^{k+4}a)^{1/4} \cdot g\left(\frac{x}{L}, y\left(\frac{g\beta BL^k a}{\nu^2}\right)^{1/4}\right). \tag{17}$$

Получим дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi(\eta)$. Запишем частные производные от переменной η:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{k}{4} \cdot \frac{\eta}{x}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \left(\frac{g\beta Bx^k a}{\nu^2}\right)^{1/4}.$$

Вычислим компоненты вектора скорости:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x} = (\nu^2 g\beta Bx^{k+4}a)^{1/4} \cdot \frac{\partial\eta}{\partial y} \cdot \frac{d\varphi}{d\eta} = (g\beta Bx^{k+2}a)^{1/2} \cdot \frac{d\varphi}{d\eta}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \nu = -\frac{\partial\psi}{\partial x} &= -(\nu^2 g\beta Ba)^{1/4}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{k+4}{4}\varphi\right) = \\ &= -(\nu^2 g\beta Bx^{k+4}a)^{1/4}\frac{1}{4x}\left[(k+4)\varphi + k\cdot\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Вычислим производные от u, входящие в уравнение (2.2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (g\beta Ba)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{k+2}{2}\varphi\right) = (g\beta Bx^{k+2}a)^{1/2}\frac{1}{4x}\left[2(k+2)\frac{d\varphi}{d\eta} + k\cdot\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\right]; \tag{20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (g\beta Bx^{k+2}a)^{1/2} \cdot \left(\frac{g\beta Bx^k}{\nu^2}\right)^{1/4} \cdot \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{g\beta Bx^{k+1}}{\nu}\right) \cdot \frac{d^3\varphi}{d\eta^3}. \tag{22}$$

Решения для температуры будем искать в виде:

$$T = T_\infty + (\Delta T)_\omega\theta(\eta), \tag{23}$$

где $\theta(\eta)$ - автомодельный представитель температуры, η - введенная ранее независимая автомодельная переменная, $(\Delta T)_\omega = T_\omega - T_\infty$ - разность температуры тела и набегающего потока.

Из граничного условия на поверхности тела (2.4) следует, что $T_\omega - T_\infty = Bx^k$. Поэтому выражение (2.24) можно преобразовать:

$$T = T_\infty + Bx^k\theta. \tag{24}$$

Подставим (2.19)-(2.23),(2.25) в (2.2)

$$\frac{d^3\varphi}{d\eta^3} = \frac{k+2}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - \frac{k+4}{4}\varphi\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - \theta. \tag{25}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) (2.26) предназначено для определения функции $\varphi(\eta)$ в области $0 \leq \eta \leq \infty$.

Перейдем в уравнение энергии (2.3) к автомодельным переменным. Используя (2.25), вычислим производные от T, входящие в уравнение (2.3):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = B\frac{\partial}{\partial x}(x^k\theta) = B\left(kx^{k-1}\theta + x^k \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{d\theta}{d\eta}\right) = \frac{B}{4}x^{k-1}\left(4k\theta + k\eta\frac{d\theta}{d\eta}\right); \tag{26}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = Bx^k\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{d\theta}{d\eta} = Bx^k\left(\frac{g\beta Bx^k}{\nu^2}\right)^{1/4} \cdot \frac{d\theta}{d\eta}; \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = Bx^k\left(\frac{g\beta Bx^k}{\nu^2}\right)^{1/2} \cdot \frac{d^2\theta}{d\eta^2}. \tag{28}$$

Подставим (2.19), (2.20), (2.27)-(2.29) в (2.3):

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} = Pr \cdot \left(k\theta\frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{k+4}{4}\varphi\frac{d\theta}{d\eta}\right), \tag{29}$$

где число Прандтля

$$Pr = \frac{\lambda}{\rho c \nu}$$

ОДУ (2.30) предназначено для определения функции $\theta(\eta)$ в области $0 \le \eta \le \infty$. Таким образом, для определения двух функций φ и θ получили два уравнения (2.26) и (2.30).

Теперь представим граничные условия (2.4), (2.5) в автомодельных переменных. Для этого воспользуемся соотношениями (2.19), (2.20), (2.25) и выражением для независимой автомодельной переменной η:

$$\eta = 0\colon \varphi(0) = 0, \frac{d\varphi}{d\eta}\Big|_{\eta=0}, \theta(0) = 1. \tag{30}$$

$$\eta \to \infty\colon \frac{d\varphi}{d\eta}\Big|_{\eta\to\infty} \to 0, \theta(\infty) \to 0. \tag{31}$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи о конвективном пограничном слое вблизи поверхности нагретого тела при условии пренебрежения теплом, которые выделяется вследствие работы сил вязкости, сводится к решению краевой задачи для системы ОДУ (2.26), (2.30) с граничными условиями (2.31) при $\eta = 0$ и (2.32) при $\eta \to \infty$.

Численное решение краевой задачи. Обсудим численное решение система уравнений (2.26), (2.30). ОДУ (2.26) является ОДУ 3-го порядка относительно функции φ, а ОДУ (2.30) - ОДУ 2-го порядка относительно функции θ. Для численного интегрирования этих уравнений на полуинтервале $[0, \infty)$ необходимо наличие пяти начальных условий, а именно при $\eta = 0$ необходимо знать

$$\varphi(0) = \varphi_{00}, \frac{d\varphi}{d\eta}\Big|_{\eta=0} = \varphi_{10}, \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\Big|_{\eta=0} = \varphi_{20}, \theta(0) = \theta_{00}, \frac{d\theta}{d\eta}\Big|_{\eta=0} = \theta_{10}.$$

Тогда для системы ОДУ (2.26), (2.30) мы имели бы задачу Коши. Однако в нашем случае известны только три условия (см. (2.31)). Значения φ_{20} и θ_{10} необходимо определить. Они должны быть такими, чтобы при $\eta \to \infty$ выполнялось условие (2.32).

Результаты расчетов. В соответствии с рисунками 2.2-2.8 представлено распределение температуры, продольной и поперечной составляющих скорости при различных значениях Pr и k.

Случай неньютоновских сред. Постановка задачи. Течение степенной неньютоновской жидкости с нелинейной теплопроводностью вблизи поверхности тела при условии пренебрежения теплом, которое выделяется вследсвие работы сил вязкости, описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0, \tag{32}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu * n \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (T - T_\infty) a x, \tag{33}$$

$$c\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda, m \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|^{m-1} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{34}$$

Граничные условия на поверхности тела имеют вид при

$$y = 0 \colon u = 0, \nu = 0, T = T_\infty + B x^k (B = const, k = const). \tag{35}$$

Граничные условия вдали от тела («на бесконечности») имеют вид при

$$y \to \infty \colon u \to 0, T \to T_\infty. \tag{36}$$

Мы получили краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (3.1)-(3.3) с граничными условиями (3.4), (3.5).

Условие при $x = 0$ не требуется, потому что задача оказывается автомодельной.

Постановка краевой задачи в автомодельных переменных. Путем аналогичный преобразований получаем систему ОДУ:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \frac{k+2}{2} - \frac{(n(k+2)+2)}{(2n+2)} \varphi \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = \left| \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} \right|^{n-1} \frac{d^3\varphi}{d\eta^3} + \theta \cdot$$

$$c\rho x^{\frac{3k}{2}}\frac{d\varphi}{d\eta}Bk\cdot(\theta+\frac{n}{2(n+2)}\frac{d\theta}{d\eta}-x^{\frac{n(k+2)+2+k}{2(n+1)}}\cdot\frac{1}{2(n+1)}\cdot$$

$$\cdot\left[(n(k+2)+2)\varphi+k\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right]Bk^{k-1}\cdot\frac{d\theta}{d\eta}=\lambda Bx^{k}\left(\frac{g\beta Bx^{k}a}{\left(\frac{\mu_{*}n}{\rho}\right)^{2}u^{2n-2}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\cdot$$

$$\cdot\frac{d^{2}\theta}{d\eta^{2}}\cdot\left(\frac{1}{g\beta Ba}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Результаты расчетов. В соответствии с рисунками 3.1-3.7 представлено распределение температуры, продольной и поперечной составляющих скорости при различных значениях Pr и k.

Заключение. Решена задача об обтекании затупленного тела потоком вязкой несжимаемой жидкости. Это задача является автомодельной. Выполнен переход к автомодельным переменным и сформулирована краевая задача в автомодельных переменных. После ряда преобразований, решение задачи сведено к решению системы ОДУ, с граничными условиями при $\eta = 0$ и $\eta \to \infty$. Для решения задачи был применен численный метод, представляющий собой комбинация метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Решение задачи представлено в виде графиков. Дана оценка распределений параметров в пограничном слое.