

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического и компьютерного моделирования

**Схлопывание одномерной полости**

**в идеальной сжимаемой жидкости**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 413 группы

направление 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Тацаева Василия Михайловича

Научный руководитель  
Старший преподаватель

В.С. Кожанов

Зав. кафедрой  
зав. каф., д.ф.-м.н., доцент

Ю.А. Блинков

Саратов 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>3</b>
<b>1 Автомодельная задача о схлопывании пустой полости</b> .....	<b>4</b>
1.1 Постановка задачи .....	4
1.2 Постановка задачи в автомодельных переменных. Автомо- дельное решение задачи .....	5
1.3 Исследование задачи на фазовой полости.....	7
1.4 Течение после схлопывания .....	11
<b>2 Численные методы в автомодельной задаче о схлопывании     пустой полости</b> .....	<b>14</b>
2.1 Метод определения показателя автомодельности .....	14
2.2 Значения показателя автомодельности для цилиндриче- ского случая .....	17
2.3 Значения показателя автомодельности для сферического случая .....	18
2.4 Распределение параметров течения .....	19
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>22</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Модельные задачи играют роль испытательного полигона для проверки новых методологических концепций и оценки точности результатов, полученных с помощью сконструированных на их основе программных средств. Набор тестовых задач служит для проверки корректности работы проекционно-эволюционных методов.

Тестирование численных методов проводится на задачах распада произвольного разрыва различной конфигурации. Рассматриваемые задачи имеют аналитические решения и являются стандартными тестами, которым подвергается любой новый численный метод. Результаты расчетов позволяют судить о монотонности и точности численного решения, наличии численной диффузии и фазовых ошибок, нефизических осцилляций и сглаживании решения в областях резких градиентов параметров.

В данной работе рассматривается процесс схлопывания одномерной пустой полости в идеальной сжимаемой жидкости. Целью исследования является расчет течения в области за границей полости в автомодельном случае. Процесс принимает автомодельный характер в малой окрестности центра (оси) схлопывания.

В первом разделе работы описывается процесс. Рассматривается постановка задачи в автомодельных переменных. Исследуется решение на фазовой плоскости.

Во втором разделе проводится сравнение классического (гомэнтропического) и негомэнтропического случаев схлопывания полости.

Третий раздел посвящен численному интегрированию задачи на фазовой плоскости. Описывается алгоритм нахождения показателя автомодельности.

# 1 Автомодельная задача о схлопывании пустой полости

## 1.1 Постановка задачи

Чтобы описать захлопывание пустой полости в воде, необходимо решить уравнение сохранения количества движения и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial r'} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial r'} + \rho' \left( \frac{\partial u'}{\partial r'} + \nu \frac{u'}{r'} \right) = 0. \quad (1.2)$$

К этим уравнениям следует добавить уравнение состояния в форме, представляющей собой модификацию уравнения Тэта:

$$\frac{p' + B}{B} = \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (1.3)$$

где если  $S$  удельная энтропия, то  $\rho' = \rho'(p', S)$ ,  $\rho_0(0, S)$  и  $B$  некоторая функция от  $S$ , имеющая размерность давления. Показатель  $\gamma$  - постоянная величина, а  $B$  и  $\rho_0$  - медленно изменяющиеся функция от  $S$ . Скорость звука  $c'$  определяется, как обычно, формулой

$$c'^2 = \left( \frac{\partial p'}{\partial \rho'} \right)_s = \frac{\gamma B (\rho')^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} \quad (1.4)$$

Чтобы полностью описать течение жидкости, необходимо дополнительно задать распределение скорости и давления в жидкости в некоторый начальный момент. Это не вызывает затруднений, если рассматривать жидкость как несжимаемую, так как возмущения при этом распространяются мгновенно и все течение в какой либо данный момент определяется движением границы полости в этот момент. Выбор какого нибудь специального распределения, представляющего приближение к физически реальным условиям, является по необходимости произвольным. В частности, если выбрать начальные условия такими же, как и в задаче о несжимаемой жидкости, то есть считать, что жидкость в начальный момент покоится и находится под постоянным положительным давлением, а полость пустая, то в начальный момент в движении возник бы разрыв, который продолжал бы свое существование и в последую-

щем течений. Однако эта трудность, связанная с начальными условиями, не имеет отношения к физической стороне дела. Сжимаемость жидкости играет роль только при больших скоростях, то есть в конечной стадии схлопывания, и точная форма начального течения в той стадии, когда скорости малы, не оказывает значительного влияния.

Движение жидкости, следовательно, не зависит от масштабов  $p_0$  и  $R_0$  в отдельности, но зависит только от их комбинации  $p_0 R_0^3$ , которая равно  $3E/4\pi$ , где  $E$  - начальная потенциальная энергия системы. Когда  $R' \ll R_0$ , почти вся эта потенциальная энергия превращается в кинетическую энергию движения жидкости. Все течение формально определяется единственным параметром  $E$ , если  $p_0 > 0$  и  $R_0 > 0$  так, что  $E$  останется постоянным. Это значит, что рассматриваем полость бесконечных начальных размеров, которая захлопывается в течение бесконечного времени. Теперь уже нет разности между давлением в полости и давлением в жидкости на большом расстоянии от нее, и имеется постоянная и конечная энергия  $E$ , связанная с течением.

## 1.2 Постановка задачи в автомодельных переменных. Автомодельное решение задачи

В момент  $t = 0$  соотношение  $r/R$  становится бесконечным при любых  $r > 0$ . Ниже будем интересоваться временами не только  $t > 0$ , но и  $t < 0$ , по этому удобнее ввести автомодельную переменную, определяемую формулой

$$\xi = - \left( \frac{R}{r} \right)^{1/n} = \frac{\alpha t}{r^{1/n}}, \alpha = A^{1/n}. \quad (1.5)$$

Легко видеть, что  $R(1/N) = \dot{R} = -n\alpha$ , и можем теперь представить автомодельное решение в виде

$$u = -n\alpha r^{n-1/n} F(\xi), c^2 = -n^2 \alpha^2 r^{2-2/n} G(\xi) \quad (1.6)$$

Подставляя выражение (1.6) в основные уравнения (??) и (??), получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\gamma - 1)(1 + \xi F)F' + \xi G' + (1 - n)[2G + (\gamma - 1)F^2] = 0, \quad (1.7)$$

$$(\gamma - 1)\xi FG + (1 + \xi F)G' + 2(1 - n) + (\gamma - 1)[1 - (1 + \nu)n]FG = 0. \quad (1.8)$$

Штрихи здесь обозначают дифференцирование по  $\xi$ .

Задача определения течения при  $t < 0$  состоит в решении уравнений для функций  $F$  и  $G$  в области  $1 \leq \xi \leq 0$ . На границе полости должны выполняться условия  $F(-1) = 1$  и  $G(-1) = 0$ .

Непосредственное исследование показывает, что существует единственное регулярное разложение для функций  $F$  и  $G$  около точки  $\xi = 1$ , удовлетворяющее этим условиям:

$$\begin{cases} F = 1 + \frac{2(1-n)+(\gamma-1)[1-(1+\nu)n]+1}{\gamma}(\xi + 1) + 0[(\xi + 1)^2], \\ G = (\gamma - 1)(1 - n) + 0[(\xi + 1)^2]. \end{cases} \quad (1.9)$$

За исключением решения, в котором,  $G = 0$  повсюду, это есть единственное регулярное решение, удовлетворяющее условиям при  $\xi = 1$ . Найдём теперь внешние граничные условия, которым следует подчинить это автомодельное решение. Если рассматривать все течение в целом, то необходимо, чтобы  $u \rightarrow 0$  и  $c \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Однако автомодельное решение справедливо, если только  $c^2 \gg 1$ , и не может быть справедливым для сколь угодно больших  $r$ . Поскольку существует область, где приближение  $c^2 \gg 1$  нарушается, необходимо подобрать такое решение уравнений течения, для которого  $u$  и  $c$  остаются конечными при  $(-t) \rightarrow 0$ . Автомодельная переменная  $\xi$  равна нулю при  $t = 0$  и  $r > 0$ .

Выражение  $(1 + \xi F)^2 - \xi^2 G$  обращается в нуль на границе полости; легко видеть также, что оно должно снова обращаться в нуль в физически реальном интервале  $1 \leq \xi \leq 0$ . Разложение (1.9) показывает, что это выражение становится отрицательным, по мере того как  $\xi$  возрастает, начиная от  $-1$ , но что оно равно единице в точке  $\xi = 0$ , так как в этой точке величины  $\xi F$  и  $\xi^2 G$  равны нулю. Как обнаружится позднее, выражение  $(1 + \xi F)^2 - \xi^2 G$  действительно обращается в нуль только один раз в интервале  $1 \leq \xi \leq 0$ . Назовём эту точку  $\xi = \xi_0$ .

Как только  $n$  задано, решения уравнений (1.7) и (1.8) полностью определяются граничными условиями при  $\xi = 1$ ; в общем случае это решение нерегулярно при  $\xi = \xi_0$ . Однако  $n$  все еще является свободным параметром и, как покажем, можно подобрать такое значение  $n$ , чтобы  $F$  и  $G$  были регулярны в интервале  $1 \leq \xi \leq 0$ . Значение показателя  $n$  зависит от  $\gamma$ .

Метод определения показателя  $n$  в степенном законе автомодельного решения, основанный на отыскании регулярного решения, был впервые применен Гудрерлеем в его работе о сходимости сферической ударной волне.

### 1.3 Исследование задачи на фазовой полости

Для исследования решений уравнений (1.7) и (1.8) удобно произвести замену переменных. Введем новые переменные по формулам

$$X = \ln(-\xi), Y = -\xi F, Z = \xi^2 G. \quad (1.10)$$

Уравнения, которые получаются, если подставить эти соотношения в (1.7) и (1.8), содержат только величины  $X, Y$  и  $Z$ . Их можно записать в виде

$$\begin{aligned} dX : dY : dZ = \\ = (Y - 1)^2 - Z : (\gamma - 1)(nY - 1)Y - Z[(\gamma - 1)(1 + \nu)nY - 2(1 - n)] : \\ Z(\gamma - 1)(-2nZ + [(\gamma - 1)\nu + 2]nY^2 + [\gamma - 3 - [(\gamma - 1)(1 + \nu) + 2]n]Y + 2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Равенство отношений вторых членов к третьим представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка относительно только  $Y$  и  $Z$ , и именно оно должно быть проинтегрировано. Это уравнение следует интегрировать численно, так как нельзя получить интеграл в аналитическом виде при произвольной величине  $n$ . Следовательно, задача интегрирования уравнений (1.7) и (1.8) сводится к решению уравнения относительно  $Y$  и  $Z$ , то есть переносится на плоскость  $YZ$ . Граничные условия  $F = 1, G = 0$  на границе полости  $\xi = 1$  соответствует точке  $C(1, 0)$  на плоскости  $YZ$ . Она является особой точкой уравнения в переменных  $Y, Z$  типа седла, через которую про-

ходят две интегральные кривые. Одной из них является  $Z = 0$ . Уравнение касательной к кривой, являющейся другим решением, есть

$$[(\gamma - 1) - a]Z = -(\gamma - 1)\gamma b(Y - 1)$$

Это вторая интегральная кривая в полости  $YZ$  соответствует регулярно разложению (1.9) около точки  $\xi = 1$ . Начало координат  $O$  на плоскости  $YZ$  есть узловая особая точка. Единственная интегральная кривая входит в эту точку вдоль линии  $3Y = (1 - n)Z$ , и все другие интегральные кривые проходят через нее, касаясь оси  $Y$ , которая сама является интегральной кривой. Из уравнения (1.11) видно, что вблизи начала координат имеет место соотношение  $dX : dZ = 1 : 2Z$  с точностью до малых первого порядка, так что  $X \rightarrow -\infty$  при  $Z \rightarrow 0$ . Следовательно, начало координат на плоскости  $YZ$  соответствует оси  $r(\xi = 0)$  на физической плоскости  $rt$ . Это не связано с какой либо физической особенностью, так как начало координат является особой точкой только для уравнения с переменными  $Y, Z$ , но не для уравнений (1.7) и (1.8). Следовательно, искомая интегральная кривая в полости  $YZ$  необходимо выяснить некоторые основные свойства интегралов уравнений (1.11). Из уравнений (1.11) видно, что  $dZ = 0$  на линии  $Z = 0$ , которая является интегральной кривой, а также на параболе

$$2(b - 1)Z = -\{[(\gamma - 1)b - a + 2]Y^2 + (a - 4)Y + 2\} \quad (1.12)$$

Кривой, на которой  $dY = 0$ , является кубическая кривая

$$Z[(3b + \gamma - 1 - a)Y - 2b] = (\gamma - 1)[(1 - b)Y^3 + (b - 2)Y^2 + Y]. \quad (1.13)$$

Особенности дифференциального уравнения с переменными  $Y, X$  возникают тогда, когда одновременно обращаются в нуль второй и третий член в правой части уравнения (1.11). Следовательно, особые точки уравнения являются обычными точками указанных кривых (1.12) и (1.13), и для них ни  $dY$ , ни  $dZ$  не обращаются в нуль. Имеется шесть таких точек: начало координат  $O$ , точки



$$A\left(-\frac{1}{b-1}, 0\right), B\left(-\frac{2}{a-\gamma-1}, \frac{(\gamma-1)[a-2b-(\gamma-1)]}{(a-\gamma-1)^2(b-1)}\right), C(1, 0)$$

и две точки параболы  $Z - (Y - 2)^2$ , которые служат корнями уравнения

$$[(\gamma - 1)b - a]Y^2 + (a - 4b)Y + 2b = 0. \quad (1.14)$$

Случай  $n < n_1$  соответствует схлопыванию, которое происходит быстрее, чем это следует из модели несжимаемой жидкости, когда  $n = 0.4$ . Из энергетических соображений следует, что  $n > 0.4$ : поэтому только случай  $n_2 < n$  представляет интерес. Точки  $D$  и  $E$  совпадают одна с другой при  $n = n_2$  и особая точка при этом является одновременно и седлом, и узлом. Точки разделяются, если  $n$  превышает указанную величину, причем точка  $E$  становится узлом, а точка  $D$  седлом. При некотором значении  $n$ , точка  $E$  становится фокусом и остается таковым: сдвигаясь вниз по параболе  $Z = (Y - 1)^2$  при увеличении  $n$  вплоть до совпадения с точкой  $C$  при  $n = 1$ . Для данной задачи следует рассматривать только точку  $E$ , если последняя существует. Следовательно, ищем интегральную кривую, которая выходит из точки  $C$ , пересекает параболу  $Z = (Y - 1)^2$  только в точке  $E$  и направляется к точке  $O$ . Следующее условие заключается в том, что на этой кривой  $Y$  должно быть регулярной функцией  $Z$  в точке  $E$ . Это необходимо, так как  $F$  и  $G$  регулярные функции от  $\xi$  при  $\xi = \xi_0 \neq 0$ .

Можно видеть, что значение  $A_{01}$ , соответствующее меньшему по абсолютной величине корню для  $(a_{10}\nu^{-1} + a_{01})$ , есть положительное целое число только в том случае, если отношение корней равно  $N$  или  $1/N$ , где  $N$  некоторое положительное целое число. Величина  $A_{01}$ , соответствующая большему корню, никогда не бывает целым положительным числом.

Рассмотрение вопроса о регулярности решения в точке  $E$  теперь можно считать завершенным, и продолжим рассмотрение вопроса о численном интегрировании уравнения в переменных  $Y, Z$  при различных значениях  $n$ . Видели выше, что  $n_2 \leq n$ . Когда выполняется равенство, точки  $D$  и  $E$  совпадают. При этом имеется единственное регулярное решение, проходящее через эту точку и не проходящее через точку  $C$ . При немного больших значениях  $n$

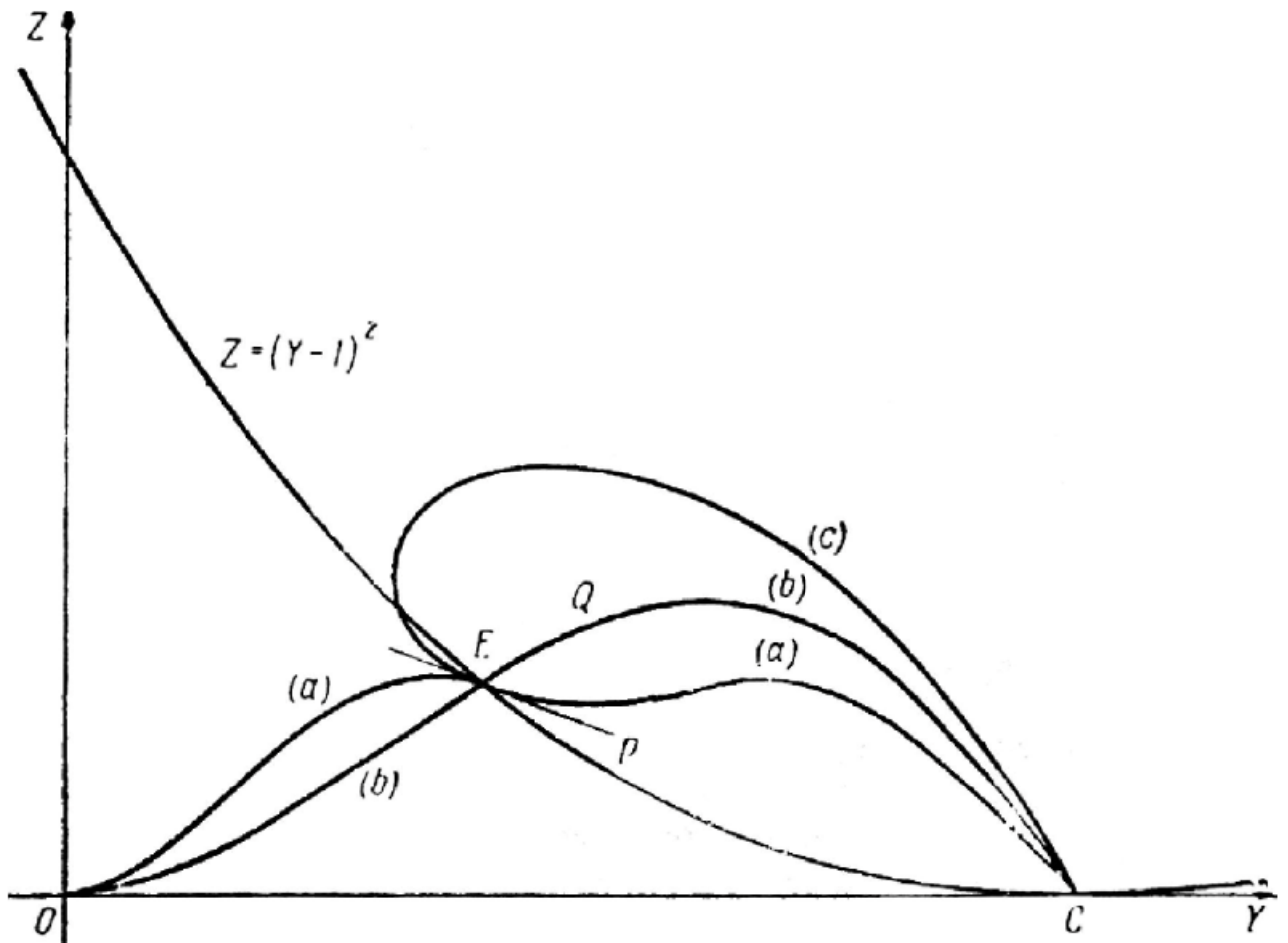


Рисунок 1.1

путь интегральных кривых выходящих из точки  $C$ , показан на фиг.1.1 в виде кривой  $(a)$ . График в соответствии с рисунком 1.1 только схематичен. Положение точки  $E$  меняется при изменении  $n$ , и на графике перекрыты три случая. Можно привести несколько причин, из за которых кривые такого типа должны быть отвергнуты. Исследование, проведенное, выше, показывает, что такие интегральные кривые представляют собой регулярное решение  $y = y(z)$  только в исключительном случае 3. В нашей задаче имеется бесчисленное множество значений  $n$  и, следовательно, положений точки  $E$ . Поскольку это множество бесчисленно, то маловероятно, что осуществится исключительный случай, однако такая возможность существует. Если бы этот исключительный случай все же появился, то это могло бы произойти только в результате особого выбора  $\gamma$ . Два условия, которым должен удовлетворять показатель  $n$  в исключительном случае, в действительности представляют собой два соотношения между  $\gamma$  и  $n$ . Таким образом, если бы оба условия были выполнены

для какого то одного значения  $\gamma$ , то они уже не смогли бы выполняться для близкого соседнего значения  $\gamma$ . Такое необычное решение, которое связано со специальным выбором  $\gamma$ , едва ли можно признать физически осуществимым. Последнее соображение, согласно которому такое решение следует отвергнуть, состоит в том, что если, исходя из этого решения, начертить график  $c^2$  в зависимости от  $r$  для какого нибудь данного момента времени, то на графике появляется точка перегиба между границей полости и максимальным значением  $c^2$ . Графики, полученные путем численного интегрирования уравнений в частных производных, не обладают такой особенностью. Когда  $n$  достигает величины  $n^*$ , интегральная кривая, выходящая из точки  $C$ , проходит через точку  $E$  вдоль регулярного пути  $EQ$  и направляется в точку  $O$  (кривая  $B$  в соответствии с рисунком 1.1). Эта кривая, следовательно, представляет собой регулярную функцию  $Y = Y(Z)$  и, как можно видеть из уравнений (1.11), в этом случае функция  $X = X(Z)$  также регулярна. Для этих кривых, таким образом, функции  $F(\xi)$  и  $G(\xi)$  регулярны в интервале  $1 \leq \xi \leq 0$ , и получаем решение нашей физической задачи.

#### 1.4 Течение после схлопывания

Полость исчезает в момент времени  $t = 0$ , однако автомодельное решение для процесса схлопывания не становится при этом повсюду несправедливым. Для распространения информации о том, что полость схлопнулась, требуется конечное время, поэтому сначала течение меняется лишь в непосредственной близости от центра. Таким образом, следует ожидать, что при  $r > 0$  можно продолжить решение, описывающее схлопывание и справедливое для  $t \leq 0$ , и на положительные значения времени  $t > 0$ , то есть из области отрицательных в область положительных  $\xi$ . В последнем разделе проинтегрировали уравнения (1.7) и (1.8) для  $F$  и  $G$  в интервале  $1 \leq \xi \leq 0$ . Поскольку  $F$  и  $G$  конечны при  $\xi = 0$  и уравнения не имеют особенностей в этой точке, интегрирование можно продолжить и в области положительных значений  $\xi$ . Когда продолжаем решение в область  $\xi > 0$ , то возникает особенность при некотором  $\xi_1$ , так как при этом снова выполняется равенство  $(1 + \xi F)^2 - \xi^2 G$ . Эту особенность которая соответствует характеристике, выхо-

дящей из центра  $O$ , следует устранить. Для этого существует только один путь - ввести разрыв в величинах  $F$  и  $G$  при некотором значении  $\xi = \xi_k$ , меньшем значения  $\xi_1$ . Физически это означает, что в точке  $r = 0, t = 0$  образуется ударная волна, которая распространяется от центра по закону  $kr^{1/n} = \alpha t$ . Формально интегральная кривая на полости  $YZ$  проходит через начало и прдолжается в области  $Y < 0, Z > 0$  до тех пор, пока она не пересечет параболу  $Z = (Y - 1)^2$  в точке  $H$ . Этот интеграл теряет фищический смысл за точкой  $H$ , так как функции  $F$  и  $G$  должны быть однозначными функциями  $\xi$ . Поскольку уданая волна выходит из точки  $O$  на плоскости  $rt$ , не существует ни одной характеристики, которая выходила бы из точки  $O$ , и поэтому выражение  $(1 + \xi F)^2 - \xi^2 G$  меняет знак при  $\xi = \xi_k$ , испытывая при этом разрыв. Соответственно этому интегральная кривая на полости  $YZ$  перескакивает через параболу  $Z = (Y - 1)^2$ , также претерпевая разрыв.

Если, как это принято в нашей задаче, во всем течении справедливо единственное соотношение между  $p$  и  $\rho$ , то для определения движения ударной волны достаточно только двух условий, а именно условий сохранения массы и количества движения. Если приписать индекс 1 величинам перед фронтом ударной волны и индекс 2 - величинам за фронтом, то уравнения сохранения массы и количества движения для ударной волны можно записать в виде

$$c_1^{2/(\gamma-1)}(u_1 - \nu) = c_2^{2/(\gamma-1)}(u_2 - \nu), \quad (1.15)$$

$$c_1^{2/(\gamma-1)}[c_1^2 + \gamma(u_1 - \nu)^2] = c_2^{2/(\gamma-1)}[c_2^2 + \gamma(u_2 - \nu)^2]. \quad (1.16)$$

где  $\nu$  - есть скорость распространения ударной волны. Эти соотношения должны выполняться при  $\xi = \xi_k$ .

Для каждой точки отрезка  $OH$  интегральной кривой в плоскости  $YZ$  можно вычислить величины  $Y_2$  и  $Z_2$ , то есть те значения  $Y$  и  $Z$ , которые принадлежат течению непосредственно за ударной волной, если последняя появляется в этой точке. Кривая, являющаяся геометрическим местом возможных значений  $Y_2$  и  $Z_2$ , выходит из точки  $C$  вдоль линии  $Z = \gamma(1 - Y)$  и затем поворачивает, встречаясь с параболой  $Z = (Y - 1)^2$  в точке  $H$  ( рисунок ??). Точка  $C$  соответствует ударной волне, находящейся в точке  $O$ , а точка  $H$  ударной

волне, находящейся в этой же самой точке. На своем пути кривая значений  $Y_2$  и  $Z_2$  пересекает интегральную кривую, описывающую течение за ударной волной в случае, когда полость остается захлопнутой, в единственной точке  $J$  и не встречается с другой интегральной кривой  $CF$  в каких либо иных точках, кроме  $C$ . Пересечение в точке  $C$  не соответствует физически возможному процессу, так как при этом требовалось бы, чтобы граница раскрывающейся полости двигалась вдоль линии  $t = 0$  на плоскости  $rt$ . Пересечение в точке  $J$  соответствует физически возможному течению, в котором полость при  $t > 0$  остается захлопнутой; сшивание двух автmodelьных решений происходит в этом случае непосредственно. Находим точку  $K$  на отрезке  $OH$  интегральной кривой в плоскости  $YZ$ , которая при переходе через ударную волну превращается в точку  $J$ , а также значения  $\xi$ ,  $F$  и  $G$  в этой точке. Эти величины определяют соответствующие значения  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $\eta$  в точке  $J$ , то есть параметры за ударной волной.

## 2 Численные методы в автомодельной задаче о схлопывании пустой полости

### 2.1 Метод определения показателя автомодельности

Для удобства изложения численных методов кратко приведем основные результаты аналитического исследования.

Чтобы решить автомодельную задачу о схлопывании пустой полости, необходимо решить систему ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\xi} &= \frac{P_1}{P_3}, \frac{dG}{d\xi} = \frac{P_2}{P_3}, \text{ где} \\ P_1 &= \{a\xi FG - b(1 + \xi F)[2G + (\gamma - 1)F^2]\}/(\gamma - 1), \\ P_2 &= b[2G + (\gamma - 1)F^2]\xi F - a(1 + \xi F)FG, \\ P_3 &= (1 + \xi F)^2 - \xi^2 G, \\ a &= 2(1 - n) + (\gamma - 1)[1 - (1 + \nu)n], b = 1 - n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$\text{при } \xi = -1 : F(-1) = 1, G(-1) = 0 \text{ и} \tag{2.2}$$

$$\text{при } \xi = 0 : (-\xi)^{1-n} F(\xi) = 0, (-\xi)^{2-2n} G(\xi) = 0. \tag{2.3}$$

Здесь  $F, G$  – зависимые автомодельные переменные, представители скорости и квадрата скорости звука  $c^2$  соответственно,  $\xi$  – независимая автомодельная переменная.

В первой главе установлено, что задача будет иметь полностью аналитическое решение, если функции  $F$  и  $G$  будут аналитическими на предельной характеристике. Этого можно достичь подбором показателя автомодельности в ходе решения.

Исследование задачи на фазовой плоскости переменных  $y = -\xi F$ ,  $Z = \xi^2 G$  сводится к изучению поведения интегральных кривых одного нели-

нейного ОДУ

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{P(Y, Z)}{Q(Y, Z)}, \text{ где}$$

$$P(Y, Z) = Z(\gamma - 1)\{-2nZ + [(\gamma - 1)\nu + 2]nY^2 + [\gamma - 3 - (\gamma - 1)(1 + \nu)n]Y + 2\},$$

$$Q(Y, Z) = (\gamma - 1)(nY - 1)(Y - 1)Y - Z[(\gamma - 1)(1 + \nu)nY - 2(1 - n)].$$
(2.4)

Граничным условиям (2.2), (2.3) отвечают, соответственно, точки фазовой плоскости  $C(1, 0)$  и  $O(0, 0)$ .

ОДУ (2.4) имеет шесть особых точек, две из которых с координатами

$$Y = -\frac{B_1}{2B_2} \pm \frac{\sqrt{B_1^2 - 4B_2B_0}}{2B_2}, Z = (1 - Y)^2, \text{ где}$$

$$B_2 = (\gamma + 1)b - a, B_1 = a - 4b, B_0 = 2b.$$
(2.5)

являются образами предельной характеристики. Обозначим буквой  $E$  ту, которой отвечает знак плюс, а буквой  $D$  ту, которой отвечает знак минус в (2.5). В данной работе рассматривается решение задачи, когда полость обладает цилиндрической ( $\mu = 1$ ) или сферической ( $m = 2$ ) симметрией для двух интервалов значений показателя адиабаты  $\gamma$ :  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$  и  $\gamma_2 < \gamma$ . В этих диапазонах существует так называемое “физическое” решение задачи. Это решение характеризуется тем, что при  $n = n^*$  интегральная кривая уравнения (2.4), соединяющая точки  $C(1, 0)$ ,  $O(0, 0)$  проходит через узел  $E$ , если  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ , или узел  $D$ , если  $\gamma_2 < \gamma$ , вдоль уса отдельного направления. Реализация такого прохода означает требуемую аналитичность функций  $F$  и  $G$  на предельной характеристике.

Для каждого конкретного значения искомым показателем необходимо выбирать из промежутка  $[n_{min}, n_{max}]$ . В этом случае точки  $E$  и  $D$  будут узлами.

#### Метод определения показателя автомодельности

Суть предлагаемого метода заключается в отыскании интегральной кривой уравнения (2.4), которая при искомом значении показателя автомодель-

ности  $n$  выйдет нужным образом из особой точки  $E$  (если  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ ) или  $D$  (если  $\gamma_2 < \gamma$ ) и попадет в особую точку  $C(1, 0)$ , то есть будет второй сепаратрисой седла  $C$  и, следовательно, решением. Чтобы определить нужный показатель автомодельности будем численно интегрировать уравнение (2.4), выбирая  $n$  из интервала приемлемых значений  $[n_{min}, n_{max}]$ , соответствующих заданному  $\gamma$ . Координаты особой точки, из которой выходит интегральная кривая, брать в качестве начальных условий интегрирования нельзя. В малой окрестности особой точки решение можно представить в виде ряда

$$Z = ZR_1(y^* + \delta) + r_2(Y^* + \delta)^2 + \dots, Y = Y^* + \delta, |\delta| \ll 1,$$

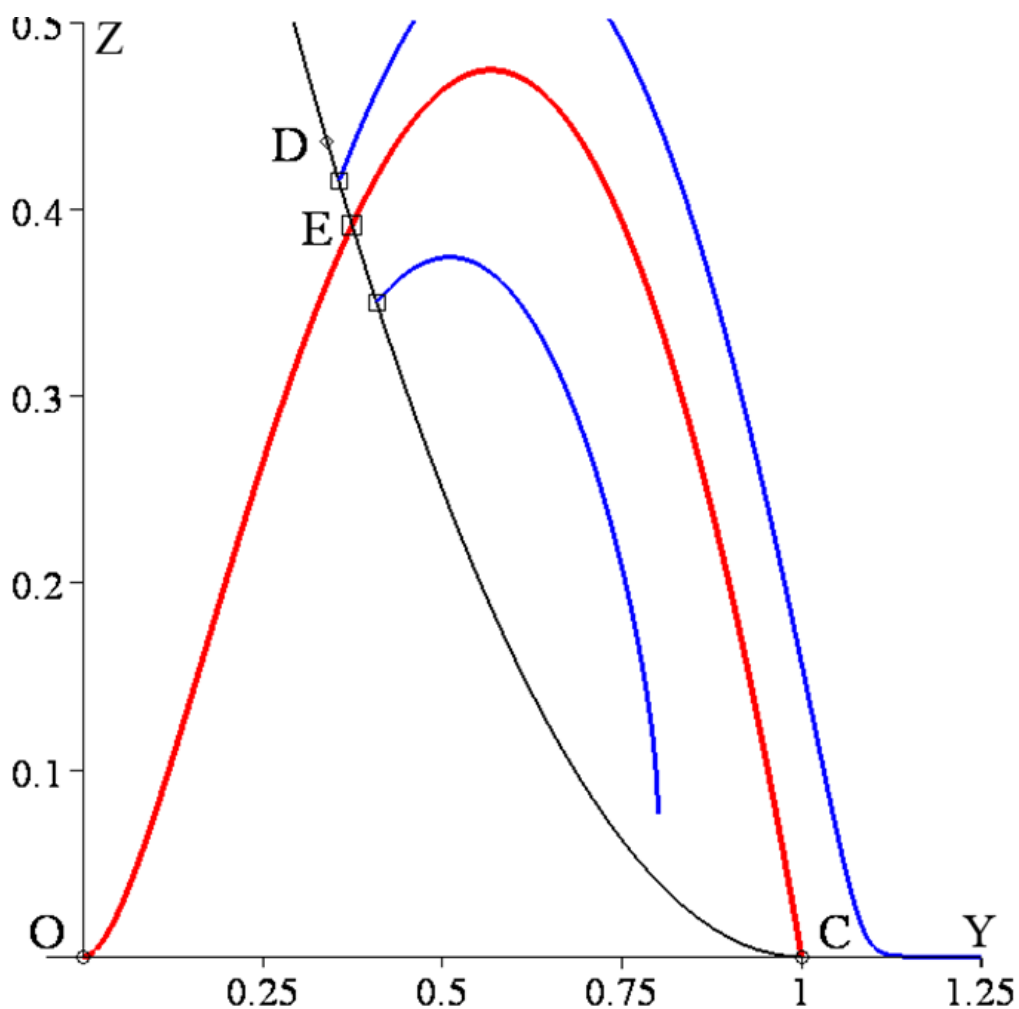


Рисунок 3.1



Поведение интегральных кривых при отыскании  $n^*$  красным цветом отмечена кривая, соответствующая правильно подобранному значению.

## 2.2 Значения показателя автомодельности для цилиндрического случая

Результаты расчетов показателя автомодельности для случая цилиндрической симметрии представлены в соответствии с рисунком 3.2.

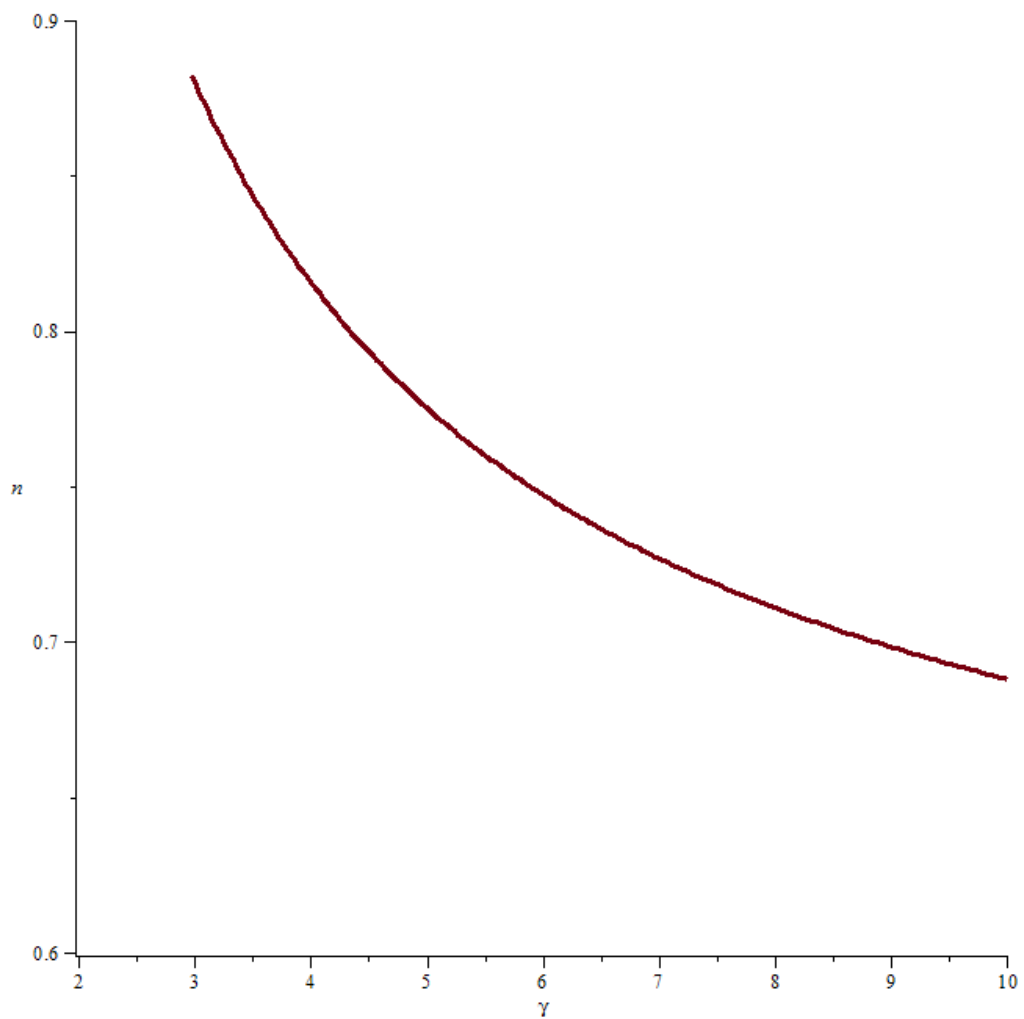


Рисунок 3.2

## 2.3 Значения показателя автономности для сферического случая

Результаты расчетов показателя автономности для случая сферической симметрии представлены в соответствии с рисунком 3.3.

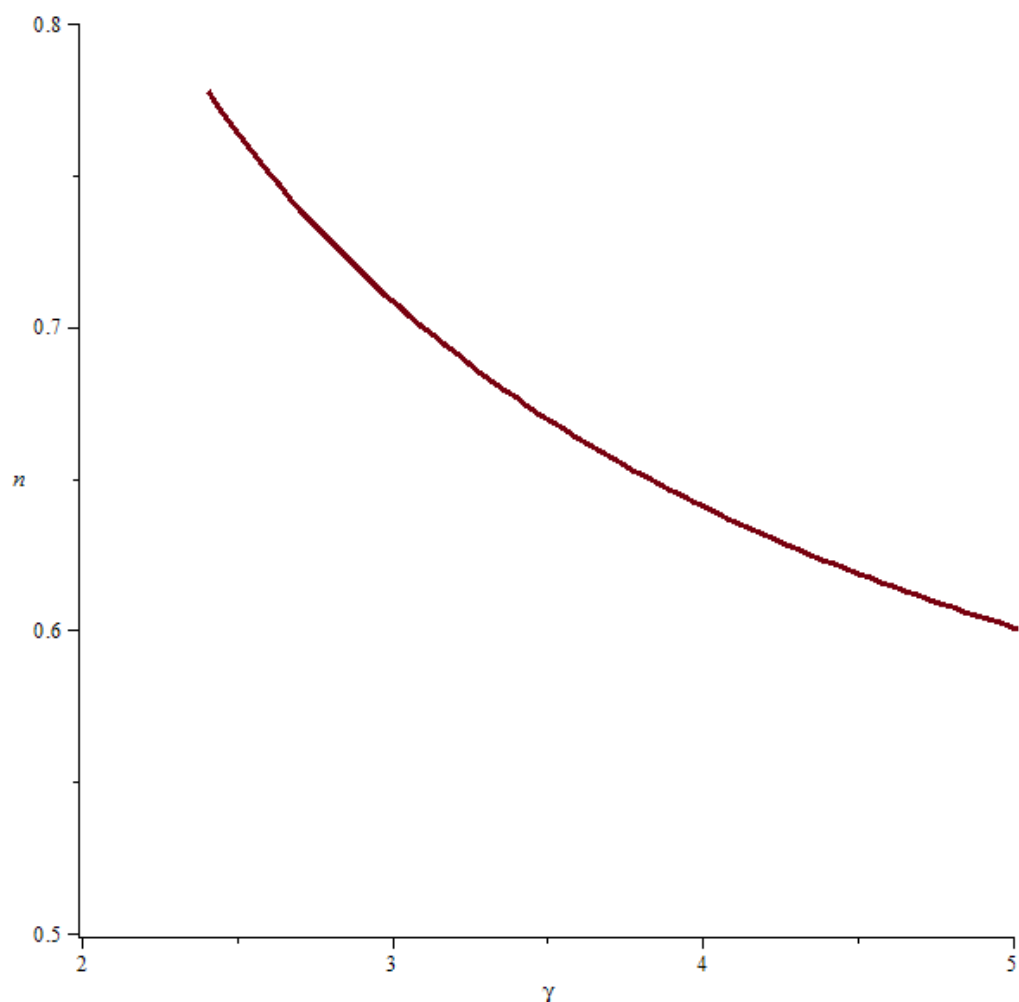


Рисунок 3.3

## 2.4 Распределение параметров течения

В соответствии с рисунком 3.4, рисунком 3.5 и рисунком 3.6 представлены распределения автомодельных представителей скорости, давления и плотности в области за границей полости для пяти значений показателя  $\gamma$ .

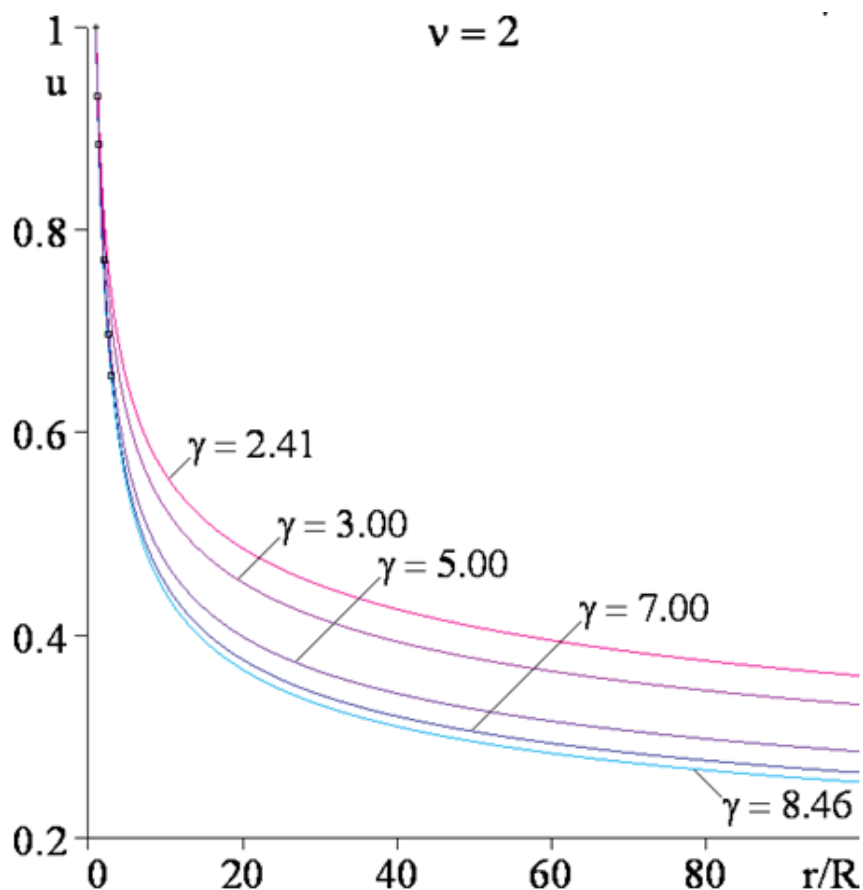


Рисунок 3.4 Распределение скорости  $u$  на стадии схлопывания полости для некоторых значений показателя  $\gamma$  из диапазона (2.4058, 8.4635) в случае сферически симметричного потока

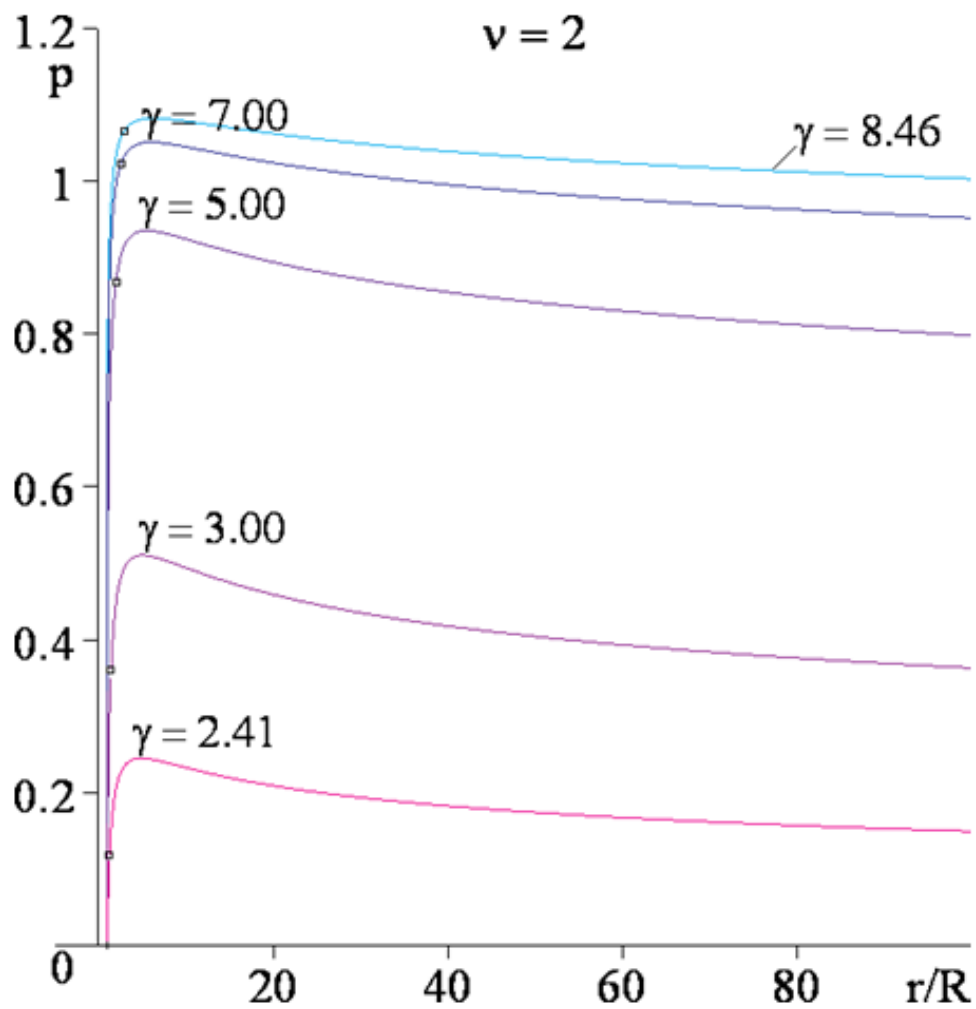


Рисунок 3.5 Распределение плотности  $p$  на стадии схлопывания полости для некоторых значений показателя  $\gamma$  из диапазона (2.4058, 8.4635) в случае сферически симметричного потока

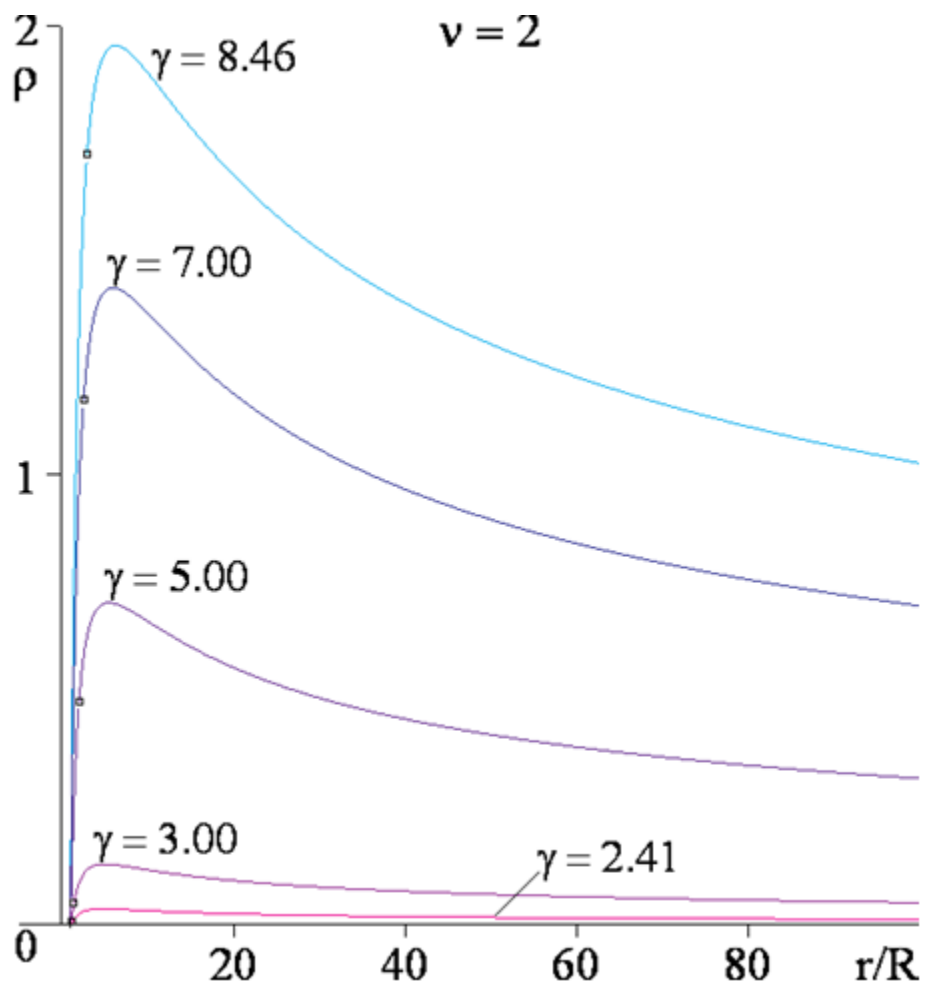


Рисунок 3.6 Распределение плотности  $\rho$  на стадии схлопывания полости для некоторых значений показателя  $\gamma$  из диапазона (2.4058, 8.4635) в случае сферически симметричного потока

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача о течение за границей пустой цилиндрической или сферической полости. Задача рассмотрена в автомодельной постановке. Выполнен переход от системы дифференциальных уравнение с частными производными к обыкновенному дифференциальному уравнению на фазовой плоскости. Составлен алгоритм определения показателя автомодельности. Выполнена серия расчетов для определения значения этого показателя при различных значениях показателя адиабаты для двух типов симметрии.