Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Математическое моделирование

управляемого движения твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 413 группы

направления 01.03.02−Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Титова Александра Геннадиевича

Научный руководитель
доцент, к.т.н. ________ И. А. Панкратов

Зав. кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент ________ Ю. А. Блинков

Саратов 2018

Введение. Создание в середине 50-х годов прошлого столетия математической теории оптимального управления было связано с потребностями решения технических и экономических задач. Проблемы управления, в частности проблемы отыскания наилучшего, оптимального управления, возникают всюду. Наиболее яркие примеры таких задач – это задачи управления летательными аппаратами, управления технологическим процессом на производстве и т. п. В настоящее время оптимальное управление выросло в обширную самостоятельную теорию, использующую в своих исследованиях аппарат высшей алгебры, математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений. [1]

Задачи оптимального управления относятся к самым сложным экстремальным задачам. Наиболее эффективным методом исследования этих задач является принцип максимума Понтрягина, представляющий собой необходимое условие оптимальности. Это одно из крупных достижений современной математики, которое обобщает и развивает основные результаты классического вариационного исчисления. Принцип максимума был сформулирован академиком Л.С. Понтрягиным в 1953 г. и в дальнейшем был доказан и развит им вместе с коллективом учеников и сотрудников.

За разработку теории оптимального управления Л.С. Понтрягину и его сотрудникам В.Г. Болтянскому, Р.В. Гамкрелидзе, и Е.Ф. Мищенко в 1962 году была присуждена Ленинская премия.

Наряду с принципом максимума Понтрягина существует принцип оптимальности Беллмана, который описывает действие математического метода оптимизации, называемого динамическим программированием. Уравнение Беллмана является достаточным условием для оптимальности и базируется на принципе оптимальности Беллмана. Уравнение Беллмана представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с начальными условиями, заданными для последнего момента времени, для функции Беллмана, которая выражает минимальное значение критерия оптимизации, которое может быть достигнуто, при условии эволюции системы из текущего состояния в некоторое конечное. А это в свою очередь позволяет перейти от решения исходной многошаговой задачи оптимизации к последовательному решению нескольких одношаговых задач оптимизации. [2]

Целью бакалаврской работы является изучение задачи оптимальной переориентации твердого тела. Задано кватернионным дифференциальным кинематическим уравнением угловое движение твердого тела. Требуется изучить графики оптимального управления с разными весовыми множителями, которые переводят твердое тело из начального углового положения в конечное положение.

В первом разделе рассматриваем математические модели углового движения твердого тела, такие как: формула Родрига с конечным поворотом твердого тела с неподвижной точкой и кинематические уравнения Эйлера. Во втором разделе - алгебра кватернионов, а именно основные операции над ними: сложение, умножение, деление, сопряженный и обратный кватернионы, норма и представление кватерниона в тригонометрической форме с помощью формулы Муавра.

В третьем разделе сначала рассматриваем общую задачу оптимального управления и применение принципа Л.С. Понтрягина. В четвертом - постановка задачи для контретного кватернионного дифференциального кинематического уравнения. [3]

В пятом - решение задачи оптимальной переориентации твердого тела путем сведение её к краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью принципа максимума. В шестом, седьмом и восьмом разделах - разработка численного решения задачи с базой данных для хранения информации о проведённых экспериментах.

Математические модели углового движения твердого тела. Введем в рассмотрение вектор $\theta = 2tg\dfrac{\varphi}{2}e$, называемый вектором конечного поворота. Формула Родрига:

$$\overline{r'} = \overline{r} + sin\varphi(\overline{e} \times \overline{r}) + (1 - cos\varphi)(\overline{e} \times (\overline{e} \times \overline{r})) \tag{1}$$

Формула (1) связывает радиусы-векторы произвольной точки твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, до поворота тела и после поворота с величинами φ и e (эйлеровым углом поворота и единичным вектором эйлеровой оси поворота), характеризующими конечный поворот твердого тела в пространстве.

Алгебра кватернионов. Под кватернионом понимают число, составленное из действительной единицы 1 и трех мнимых единиц i_1, i_2, i_3, с действительными элементами следующего вида:

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_0 1 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3. \tag{2}$$

Изложим основные правила, определяющие действия над кватернионами.

1. Равенство двух кватернионов. Два кватерниона λ и μ равны, если равны их элементы λ_j и μ_j, $j = \overline{0,3}$.

2. Нулевой кватернион. Нулевым называется кватернион, элементы которого нули.

3. Сложение кватернионов. Суммой кватернионов λ и μ называется кватернион v с элементами $\nu_j = \lambda_j + \mu_j, j = \overline{0,3}$:

$$\nu = \lambda + \mu = (\lambda_0 + \mu_0)1 + (\lambda_0 + \mu_0)1 + (\lambda_1 + \mu_1)i_1 + (\lambda_2 + \mu_2)i_2 + (\lambda_3 + \mu_3)i_3. \tag{3}$$

4. Умножение кватернионов. При умножении кватерниона λ на скаляр a происходит умножение на это число всех его элементов:

$$a\lambda = a\lambda_0 1 + a\lambda_1 i_1 + a\lambda_2 i_2 + a\lambda_3 i_3. \tag{4}$$

Произведение двух кватернионов λ, μ можно представить (используя операции векторной алгебры) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda \circ \mu = \lambda_0\mu_0 - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 - \lambda_3\mu_3 + \lambda_0(\mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3) + \\ + \mu_0(\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3) + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} = \\ = \lambda_0\mu_0 - \lambda_\nu\mu_\nu + \lambda_0\mu_\nu + \lambda_\nu\mu_0 + \lambda_\nu \times \mu_\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

5. Сопряженный кватернион. Кватернионом, сопряженным данному кватерниону λ, является кватернион, обозначаемый $\overline{\lambda}$ и определяемый формулой $\overline{\lambda} = \lambda_0 - \lambda_1 i_1 - \lambda_2 i_2 - \lambda_3 i_3 = \lambda_0 - \lambda_\nu$.

6. Норма кватерниона. Нормой кватерниона λ называется величина

$$||\lambda|| = \lambda \circ \overline{\lambda} = \overline{\lambda} \circ \lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \tag{6}$$

Общая задача оптимального управления. Мы будем предполагать, что закон движения объекта записывается в виде системы дифференциальных уравнении

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, x^2, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^n) = f^i(x, u),\ i = \overline{1, n}, \tag{7}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \tag{8}$$

где $f(x, u)$ — вектор с координатами $f^1(x, u), f^2(x, u), \cdots, f^n(x, u)$.

Мы будем говорить, чго допустимое управление $u(t), t_0 \le t \le t_1$, переводит фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, если соответствующее ему решение $x(t)$ уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, определено на всем отрезке $t_0 \le t \le t_1$ и проходит в момент t_1 через точку x_1, т. е. удовлетворяет также конечному условию $x(t_1) = x_1$.

Предположим теперь, что задана еше одна функция $f^0(x^1, x^2, \cdots, x^n, u) = f^0(x, u)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\dfrac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i = \overline{1, n}$, на всем пространстве $X \times U$. Тогда основная задача (отыскание оптимальных управлений) может быть сформулирована следующим образом.

В фазовом пространстве X даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 (если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f^0(x(t), u(t))dt \tag{9}$$

принимает наименьшее возможное значение; здесь $x(t)$ - решение уравнения (8) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующее управлению $u(t)$, а t_1 — момент прохождения этого решения через точку x_1.

Управление $u(t)$, дающее решение поставленной выше задачи, называется оптимальным управлением, соответствующим переходу из положения x_0 в положение x_1, а соответствующая траектория $x(t)$ - оптимальной траекторией. Таким образом, основная задача заключается в отыскании оптимальных управлений (и соответствующих оптимальных траекторий).

Постановка задачи оптимального управления движением твёрдого тела. Рассмотрим кинематическую задачу оптимального управления угловым движением твердого тела. Угловое движение твердого тела описывается кватернионным дифференциальным кинематическим уравнением

$$2\dot{\overline{\lambda}} = \overline{\lambda} \circ \overline{\omega}_Y, \tag{10}$$

где $\overline{\lambda}$ — кватернион, характеризующий ориентацию твердого тела относительно инерциальной системы координат, $\overline{\omega}_Y$ — абсолютная угловая скорость твердого тела, заданная своими проекциями на оси связанной системы координат, знак $\circ$ означает кватернионное произведение, а точка — дифференцирование по времени.

В скалярном виде уравнение (10) запишется следующим образом

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 = -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 = \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 = \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 = \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{cases} \tag{11}$$

где $\lambda_i,\ i = \overline{0,3}$ — компоненты кватерниона $\overline{\lambda}$, имеющие смысл параметров Родрига-Гамильтона (Эйлера), $\omega_i,\ i = \overline{1,3}$ — проекции вектора абсолютной угловой скорости твердого тела на оси жестко связанной с телом системы координат.

Требуется построить управление, переводящее твердое тело из начального углового положения

$$\overline{\lambda}(0) = \overline{\lambda}^0 \tag{12}$$

в конечное положение

$$\overline{\lambda}(T) = \overline{\lambda}^T \tag{13}$$

и доставляющее минимум функционалу

$$I = \int\limits_0^T (\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_3\omega_3^2)dt, \tag{14}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 = const > 0$ — весовые множители функционала. Функционал (14) характеризует, в некотором смысле, общие энергетические затраты на управление. Управление полагаем неограниченным, а время переориентации T — фиксированным (заданным).

Решение поставленной задачи с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. Для решения поставленной задачи будем использовать принцип максимума Л. С. Понтрягина. Составим функцию Гамильтона-Понтрягина.

Для этого преобразуем (11):

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda_0} = \frac{1}{2}(-\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3) = -\frac{1}{2}(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3) &= f_1,\\
\dot{\lambda_1} = \frac{1}{2}(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2) &= f_2,\\
\dot{\lambda_2} = \frac{1}{2}(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3) &= f_3,\\
\dot{\lambda_3} = \frac{1}{2}(\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1) &= f_4.
\end{aligned} \tag{15}$$

В формуле (14) применим обозначение

$$(\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_3\omega_3^2) = f_0. \tag{16}$$

Функция Гамильтона-Понтрягина составляется по формуле:

$$H = -f_0(\lambda, \omega, t) + \sum_{i=1}^{4} \psi_i f_i(\lambda, \omega, t), \tag{17}$$

где $\psi_i,\ i=\overline{0,3}$ — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i},\ i=\overline{0,3}. \tag{18}$$

Подставлем (15), (16) в (17). Получаем, что для рассматриваемой задачи функция H имеет вид:

$$\begin{aligned} H = -(\alpha_1\omega_1^2 + \alpha_2\omega_2^2 + \alpha_3\omega_3^2) - \frac{1}{2}\psi_0(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 + \lambda_3\omega_3) + \\ +\frac{1}{2}\psi_1(\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2) + \frac{1}{2}\psi_2(\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3) + \\ +\frac{1}{2}\psi_3(\lambda_0\omega_3 + \lambda_2\omega_1 - \lambda_2\omega_1). \end{aligned} \tag{19}$$

Найдем частные производные функции Гамильтона-Потрягина по λ_i, $i=\overline{0,3}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda_0} &= \frac{1}{2}\psi_1\omega_1 + \frac{1}{2}\psi_2\omega_2 + \frac{1}{2}\psi_3\omega_3, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} &= -\frac{1}{2}\psi_0\omega_1 - \frac{1}{2}\psi_2\omega_3 + \frac{1}{2}\psi_3\omega_2, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} &= -\frac{1}{2}\psi_0\omega_2 + \frac{1}{2}\psi_1\omega_3 - \frac{1}{2}\psi_3\omega_1, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_3} &= -\frac{1}{2}\psi_0\omega_3 - \frac{1}{2}\psi_1\omega_2 + \frac{1}{2}\psi_2\omega_1. \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя частные производные функции H по λ_i (20) в формулу (18), получаем систему:

$$\begin{cases} 2\dot{\psi}_0 = -\psi_1\omega_1 - \psi_2\omega_2 - \psi_3\omega_3, \\ 2\dot{\psi}_1 = \psi_0\omega_1 + \psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2, \\ 2\dot{\psi}_2 = \psi_0\omega_2 + \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3, \\ 2\dot{\psi}_3 = \psi_0\omega_3 + \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1, \end{cases} \tag{21}$$

В кватернионом виде система (21) имеет вид

$$2\dot{\overline{\psi}} = \overline{\psi} \circ \overline{\omega}, \tag{22}$$

где $\overline{\psi}$ — кватернионная сопряженная переменная.

Найдем частные производные функции Гамильтона-Потрягина по ω_i. Для неограниченного управления из условия максимума функции Гамильтона-Понтрягина нашли

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{-\psi_0\lambda_1 + \psi_1\lambda_0 + \psi_2\lambda_3 - \psi_3\lambda_2}{4\alpha_1}, \\ \omega_2 = \dfrac{-\psi_0\lambda_2 - \psi_1\lambda_3 + \psi_2\lambda_0 + \psi_3\lambda_1}{4\alpha_2}, \\ \omega_3 = \dfrac{-\psi_0\lambda_3 + \psi_1\lambda_2 - \psi_2\lambda_1 + \psi_3\lambda_0}{4\alpha_3}. \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом, задача сведена к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (21), замкнутой законом оптимального управления (23) с граничными условиями (12), (13). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\psi_0\lambda_1 + \psi_1\lambda_0 + \psi_2\lambda_3 - \psi_3\lambda_2, \\ p_2 &= -\psi_0\lambda_2 - \psi_1\lambda_3 + \psi_2\lambda_0 - \psi_3\lambda_1, \\ p_3 &= -\psi_0\lambda_3 + \psi_1\lambda_2 - \psi_2\lambda_1 + \psi_3\lambda_0. \end{aligned} \tag{24}$$

В кватернионной форме соотношения (24) имеют вид

$$\overline{p} = vect(\tilde{\overline{\lambda}} \circ \overline{\psi}). \tag{25}$$

Перепишем (23) с учетом (24)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{p_1}{4\alpha_1}, \\ \omega_2 &= \frac{p_2}{4\alpha_2}, \\ \omega_3 &= \frac{p_3}{4\alpha_3}. \end{aligned} \tag{26}$$

Построим дифференциальное уравнение для вектора $\overline{p}$. Продифференцируем выражение для вектора $\overline{p}$ из (25) по времени

$$\dot{\overline{p}} = vect(\dot{\tilde{\overline{\lambda}}} \circ \overline{\psi}) + vect(\tilde{\overline{\lambda}} \circ \dot{\overline{\psi}}). \tag{27}$$

Заменим $\dot{\tilde{\overline{\lambda}}}$ и $\dot{\overline{\psi}}$ с помощью дифференциальных уравнений (11) и (21). Из уравнения (10)

$$2\dot{\tilde{\overline{\lambda}}} = (\widetilde{\overline{\lambda} \circ \overline{\omega}_Y}) = \tilde{\overline{\omega}}_Y \circ \tilde{\overline{\lambda}} = -\overline{\omega}_\nu \circ (\lambda_0 - \overline{\lambda}_\nu) = -\overline{\omega} \circ \tilde{\overline{\lambda}}. \tag{28}$$

Распишем (25):

$$\overline{p} = vect(\tilde{\overline{\lambda}} \circ \overline{\psi}) = \tilde{\overline{\lambda}}_\nu \times \overline{\psi}_\nu. \tag{29}$$

Подставляя выражения (28), (22) в уравнение (27) и учитывая (29), получим

$$\dot{\overline{p}} = -\frac{1}{2}\overline{\omega} \times \overline{p} + \frac{1}{2}\overline{p} \times \overline{\omega}, \tag{30}$$

где $\times$ означает векторное произведение.

И учитывая, что при перестановки сомножителей в векторном произведение знак меняется на противоположный, получим:

$$\dot{\overline{p}} = \overline{p} \times \overline{\omega}, \tag{31}$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации твердого тела свелась к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2\dot{\overline{\lambda}} = \overline{\lambda} \circ \overline{\omega}, \\ \dot{\overline{p}} = \overline{p} \times \overline{\omega} \end{cases} \tag{32}$$

с краевыми условиями (12) и (13).

Примеры численного решения задачи для поворотов на малые и большие углы. Решим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (32) с краевыми условиями (12) и (13).

Распишем векторное произведение из (32):

$$\dot{\overline{p}} = \overline{p} \times \overline{\omega} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix} = (p_2\omega_3 - p_3\omega_2)i_1 + \\ +(p_1\omega_3 - p_3\omega_1)i_2 + (p_1\omega_2 - p_2\omega_1)i_3 \tag{33}$$

Получили 3 уравнения:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2\omega_3 - p_3\omega_2, \\ \dot{p}_2 = p_1\omega_3 - p_3\omega_1, \\ \dot{p}_3 = p_1\omega_2 - p_2\omega_1. \end{cases} \tag{34}$$

Решим задачу Коши для 7 уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2}\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2}\lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2}\lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2}\lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \\ \dot{p}_1 = p_2\omega_3 - p_3\omega_2, \\ \dot{p}_2 = p_1\omega_3 - p_3\omega_1, \\ \dot{p}_3 = p_1\omega_2 - p_2\omega_1. \end{cases} \tag{35}$$

Разработка базы данных для хранения информации о проведённых экспериментах. Понятие NoSQL (Not Only SQL или No SQL) получило известность с 2009 года. Именно тогда развитие web-технологий и социальных сервисов дало толчок множеству новых подходов к хранению и обработке данных. Разработчики таких приложений столкнулись с задачами, для которых традиционные реляционные СУБД оказались либо слишком дороги, либо недостаточно производительны. Кроме того, популяризаторами отказа от универсальных «комбайнов» (реляционные СУБД – РСУБД) в пользу специализированных решений стали стартаперы и те, кому приходится работать в сценариях так называемых Big Data. Надо понимать, что NoSQL- решения не обязательно означают замену и полный отказ от РСУБД. Как обычно, инструмент должен выбираться под задачу, а не наоборот.

Первая публичная версия MongoDB была выпущена в 2009 году, а теперь это восходящая звезда в мире NoSQL. Система задумывалась как масштабируемая база данных – название Mongo происходит от слова «humongous», получившегося объединением «huge» (гигантский) и «monstrous» (чудовищный), а в качестве основных проектных целей были поставлены высокая производительность и простота доступа к данным. Это документная база данных, которая позволяет не только хранить, но и опрашивать вложенные данные, предъявляя произвольные запросы. Схема базы данных не навязывается (в этом MongoDB похожа на Riak, но отличается от Postgres), поэтому один документ может содержать поля или типы, отсутствующие во всех остальных документах коллекции.

MongoDB используется в качестве хранилища для вычислений результатов полученных при решении краевой задачи, которая была поставлена в предыдущей главе.

Результаты вычислений. Были построены графики оптимального управления с разными весовыми множителями, которые переводят твердое тело из начального углового положения (12) в конечное положение (13) и доставляющее минимум функционалу (14).

Заключение. Решена задача оптимальной переориентации твердого тела. Была сведена задача оптимальной переориентации твердого тела с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (32) с краевыми условиями (12), (13).

Для решения задачи применены решатели odeint и fsolve из библиотеки SciPy. Полученные графики оптимального управления сохраняются в базу данных MongoDB.