МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

«Спектральные свойства сильно нерегулярного пучка второго порядка с распадающимися краевыми условиями»

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента __4___ курса ___411_____ группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

____Апариной Веры___
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор__ _____________ ___А.П. Хромов_______
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор__ _____________ ___А.П. Хромов_______
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Многие задачи математической физики приводят к изучению спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов или пучков таких операторов, которые включают в себя задачи нахождения спектра и корневых функций, разложения произвольной функции в ряд по корневым функциям, вопросы полноты и базисности системы корневых функций. Полнота системы корневых функций является очень важным свойством. Без этого свойства, например, не может идти речь о базисности системы корневых функций.

Теории полиномиальных операторных пучков посвящено очень много работ. Первые основополагающие результаты в абстрактной спектральной теории были получены М.В. Келдышем. Он ввел важнейшее понятие n-кратной полноте и сформулировал фундаментальную теорему об n-кратной полноте собственных и присоединенных векторов для широкого класса полиномиальных оператор-функций частного случая пучка $L(\lambda)$, а именно пучка, порожденного дифференциальным выражением со специальной главной частью:

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{ возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n} \quad (2l > n). \end{cases}$$

такие пучки впоследствии получили название пучки Келдыша.

В 1973 году эта теорема была доказана А.П. Хромовым в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения, а в 1976 А.А Шкаликов доказал эту теорему в случае суммируемых коэффициентов.

Также этим вопросом занимался А.И. Вагабов, в серии своих работ он исследовал вопрос о кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия полураспадающиеся.

В этой дипломной работе за основу взяты статьи В.С. Рыхлова, а также других математиков, которые будут упоминаться по ходу изложения.

Целью работы является исследование кратной полноты корневых функций сильно нерегулярного пучка второго порядка с различными(распадающимися и нераспадающимися) краевыми условиями,в частности, получение критериев полноты, достаточных условый 1-кратной полноты и не полноты.

В пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается вырожденный обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго порядка с постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого лежат на одном луче. Показывается, что собственные функции 2-кратно не полны с бесконечным дефектом ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$, где $\sigma > 0$. Исследуются вопросы 1-кратной полноты собственных функций этого пучка в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Работа состоит из введения, основных определений, .пяти разделов, заключения, списка используемых источников и приложения.

В первом разделе исследуется кратная полнота корневых функций пучка с нераспадающимися краевыми условиями $L^1(\lambda)$, рассматриваются основные условия для данного пучка и относительно этих условий формулируются теоремы о достаточной полноте и неполноте. Состоит из четырех подразделов.

Во втором разделе исследуется кратная полнота корневых функций пучка с распадающимися краевыми условиями $L^2(\lambda)$, выводятся основные теоремы о полноте и неполноте для такого вида пучков. Состоит из трех подразделов.

В третьем разделе рассматривается случай с обычной системой экспонент. Здесь рассматриваются спектральные свойства сильно вырожденного квадратичного пучка второго порядка.

Четвертый раздел носит вспомогательный характер, в нем рассматриваются примеры, в которых имеет место $1-$кратная полнота, $1-$кратная не полнота с $1-$мерным дефектом и $1-$кратная не полнота с бесконечным дефектом.

Пятый раздел содержит описание программы, а именно, описываются входные и выходные параметры, а также возможные исходы работы программы.

В приложении приводится код программы, результатом которой делается вывод о полноте или не полноте в $L_2[0,\sigma]$ системы корневых функций конкретного пучка. Этот вывод делается на основе теорем, которые будут приводиться в дальнейшем изложении.

Основное содержание работы. В первом разделе рассматривается пучок операторов $L^1(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) = y^{''} + \lambda p_1 y^{'} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_\nu(y,\lambda) = U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) = \\ = (\alpha_{\nu 1} y^{'}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{'}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1,2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$.

Предполагаем, что $0 < \omega_1 < \omega_2$, где ω_1, ω_2 – корни характеристического уравнения. Тогда $y_1(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_2 x}$. При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $l(y,\lambda) = 0$.

В данном разделе показывается, что собственные функции 2-кратно не полны с бесконечным дефектом ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma], \quad \sigma > 0$. Также исследуется вопрос 1-кратной полноты собственных функций этого пучка в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Для формулировки основного результата вводятся следующие обозначения:

$$v_{\nu j} = \frac{U_{\nu 0}(y,\lambda)}{\lambda}, \quad w_{\nu j} = e^{-\lambda\omega_j} \frac{U_{\nu 1}(y,\lambda)}{\lambda}, \quad v, j = 1,2$$

и

$$V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T, \quad W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T \quad j = 1,2.$$

Используя введенные векторы, для простоты вводятся следующие обозначения для определителей:

$$a_{sk} = \det(W_s, W_k), \quad a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k),$$
$$a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k), \quad a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k).$$

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 (a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12}) = \\ = \lambda^2 \Delta_0(\lambda).$$

Всюду в дальнейшем используются следующие условия:

1^0) ω_1, ω_2 различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, выходящем из начала координат;
2^0) $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$;
3^0) $W_2 \neq 0$ или: $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} = 0$;
4^0) $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} \neq 0$.

Лемма 1. Если выполняются условия $1^0 - 3^0$, то функция

$$y(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_1 x}$$

является порождающей для собственных функций пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$.

Лемма 2. Если выполняются условия 1^0, 2^0, 4^0, то функция

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda \omega_1 x} + b_0 e^{\lambda \omega_2 x},$$

где $b_0 \neq 0$, является порождающей для собственных функций пучка $L(\lambda)$
при $\lambda \neq 0$.

Теорема 1. Если выполняются условия $1^0 - 3^0$, то система $Y = \{y(x, \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, где $y(x, \lambda)$ определяется согласно лемме 2, 1-кратно полна в $L_2[0, \sigma]$, а относительно 2-кратной полноты имеет бесконечный дефект.

Теорема 2. Если выполняются условия 1^0, 2^0, 4^0, то система $Y = \{y(x, \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, где $y(x, \lambda)$ определяется согласно лемме 3, 2-кратно не полна в $L_2[0, \sigma]$ и имеет бесконечный дефект относительно 2-кратной полноты при любом $\sigma > 0$.

Рассматривая вопрос об 1-кратной полноте системы Y в $L_2[0, \sigma]$ в случае 4^0, считаем, что функции системы Y продолжены на отрезок $[1, \sigma]$ при $\sigma > 1$ по формуле для $y(x, \lambda)$ согласно лемме 3.

Вводится следующее обозначение:
$\mathfrak{N}_\sigma$–дефектное подпространство системы Y в пространстве $L_2[0, \sigma]$, то есть $\mathfrak{N}_\sigma : L_2[0, \sigma] \ominus \mathfrak{M}_\sigma$, где $\mathfrak{M}_\sigma$ — замыкание линейной оболочки системы Y.

Для того, чтобы охарактеризовать $\mathfrak{N}_\sigma$, рассматриваются операторы $B \in L_2[0, \sigma] \to L_2[0, \sigma\tau]$ и $A_\rho \in L_2[0, \rho] \to L_2[0, 1]$, определяемые следующими формулами:

$$(Bf)(x) = f\left(\frac{x}{\tau}\right), \quad (A_\rho f)(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{s} \bar{c}_0^j f(x + j), & x \in [0, \rho - s]; \\ \sum\limits_{j=0}^{s-1} \bar{c}_0^j f(x + j), & x \in (\rho - s, 1]; \end{cases}$$

где $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и удовлетворяет неравенствам $s < \rho \leqslant s + 1$.

Лемма 3. Если выполняются условия 1^0, 2^0, 4^0, то справедливо $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\sigma^0$, где

$$\mathfrak{N}_\sigma^0 = \left\{ f \in L_2[0, \sigma] : A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = 0 \right\}.$$

Теорема 3. Если выполняются условия 1^0, 2^0, 4^0, то система Y полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Для исследования достаточных условий 1-кратной полноты в пространстве $L_2[0,\sigma]$ рассматривается уравнение

$$A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = g,$$

где g —заданная функция в $L_2[0,\sigma]$.

Лемма 4. Если выполняются условия 1^0, 2^0, 4^0 и $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таковы, что $l < \sigma \leqslant l+1$, $m < \sigma\tau \leqslant m+1$, то уравнение

$$A_\sigma f + \frac{\bar{b}_0}{\tau} A_{\sigma\tau} B f = g$$

имеет вид

1) при $\sigma - l < \sigma\tau - m$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \bar{c}_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in [0, \sigma - l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \bar{c}_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma - l, \sigma\tau - m]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \bar{c}_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma\tau - m, 1]; \end{cases}$$

2) при $\sigma\tau - m \leqslant \sigma - l$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m} \bar{c}_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in [0, \sigma\tau - m]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \bar{c}_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma\tau - m, \sigma - l]; \\ \sum\limits_{j=0}^{l-1} \bar{c}_0^j f(x+j) + \frac{\bar{b}_0}{\tau} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \bar{c}_0^j f(\frac{x+j}{\tau}) = g(x), \quad x \in (\sigma - l, 1]; \end{cases}$$

Основным результатом данного раздела является нахождение достаточных условий 1-кратной полноты системы Y в пространстве $L_2[0,\sigma]$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия 1^0, 2^0, 4^0.

1) Если $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{\tau}$, то система Y 1-кратно полна в $L_2[0,\sigma]$.

2) Если при некотором $m \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\frac{m}{\tau} < \sigma \leqslant \min\left\{1, \frac{m+1}{\tau}\right\}, \quad \tau > m,$$

то для 1-кратной полноты системы Y в $L_2[0,\sigma]$ достаточно выполнения условия

$$|b_0|^2 \sum_{j=0}^{m} |c_0|^{2j} < \tau.$$

Во втором разделерассмотривается пучок $L^2(\lambda)$, порождённый дифференциальным выраением

$$l(y,\lambda) = y^{(2)} - 2a\lambda y^{(1)} + b\lambda^2 y \tag{0.1}$$

и краевыми условиями вида:

$$U_1(y,\lambda) = \alpha_{11} y^{(1)}(0) + \lambda\alpha_{10} y(0) = 0, U_2(y,\lambda) = \beta_{21} y^{(1)}(1) + \lambda\beta_{20} y(1) = 0, \tag{0.2}$$

где a, b, a_{ij}, β_{ij} – произвольные комплексные числа. В случае $\alpha_{11} = 0$ считаем $U_1(y,\lambda) = y(0)$, а в случае $\beta_{21} = 0$ считаем $U_2(y,\lambda) = y(1)$.

Характеристическое уравнение данного пучка имеет вид:

$$\omega^2 - 2a\omega + b = 0,$$

и его корни, очевидно, имеют вид

$$\omega_1 = a - \sqrt{a^2 - b}, \quad \omega_2 = a + \sqrt{a^2 - b}.$$

Мы будем предполагать, что ω_1, ω_2 различны и лежат на одном луче, выходящем из начала координат.

Для определенности считаем, что $0 < \omega_1 < \omega_2$ (случай произвольного луча легко сводится к этапу в результате поворота).

Тогда

$$y_1(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x), \quad y_2(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x).$$

При $\lambda \neq 0$ эти функции являются линейно независимыми решениями уравнения $l(y,\lambda) = 0$. Далее для определенности считаем $\alpha_{11} \neq 0$, $\beta_{21} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Характеристический определитель пучка имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{10} & \alpha_{11}\omega_2 + \alpha_{10} \\ (\beta_{21}\omega_1 + \beta_{20})e^{\lambda\omega_1} & (\beta_{21}\omega_2 + \beta_{20})e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = \tag{0.3}$$

$$= \lambda^2 \exp(\lambda\omega_1) c_2 [\exp(\lambda\omega_1(\tau - 1)) - c_0] = \lambda^2 \exp(\lambda\omega_1) c_2 \Delta_0(\lambda),$$

где $\tau = \omega_2/\omega_1$, $c_0 = c_1/c_2$, $c_2 = a_1 b_2$, $c_1 = a_2 b_1$, $a_i = \alpha_{11}\omega_i + \alpha_{10}$, $b_i = \beta_{21}\omega_i + \beta_{20}$, $i = 1,2$. Ясно, что в рассматриваемом случае $\tau > 1$.

Если $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ (далее будем считать, что это условие выполнено), то уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней, которые выражаются формулой

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i + d_0}{\omega_1(\tau - 1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{0.4}$$

где $d_0 = \ln_0 c_0$, $\ln_0$ – фиксированная ветвь натурального логарифма, определяемая условием $\ln_0 1 = 0$. Обозначим $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Очевидно, $\Lambda/\{0\}$ есть множество собственных значений пучка (0.1) – (0.2). Точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением, а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$. Имеет место равенство

$$\exp(\lambda_k\omega_1(\tau - 1)) = c_0, \quad \lambda_k \in \Lambda. \tag{0.5}$$

Из формулы (0.3) следует, что рассматриваемый пучок является ненормальным в терминологии [?].

В качестве собственных функций (с.ф.) пучка (0.1) – (0.2) возьмём следующие функции

$$y(x,\lambda_k) = \frac{1}{a_2\lambda} \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) \end{vmatrix}_{|\lambda=\lambda_k} = a_0 \exp(\lambda_k\omega_1\tau x) - \exp(\lambda_k\omega_1 x) =$$

$$= a_0 \exp\left(\frac{\tau x}{\tau - 1}(2k\pi i + d_0)\right) - \exp\left(\frac{x}{\tau - 1}(2k\pi i + d_0)\right), \lambda \in \Lambda/\{0\}, \tag{0.6}$$

где $a_0 = a_1/a_2$. Обозначим $Y = \{y(x,\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, функция $y(x,0) = a_0 - 1$ есть либо с.ф., либо просто фиксированная ненулевая функция, либо нулевая функция. Таким образом, добавление к системе с.ф. пучка (0.1) - (0.2) функции $y(x,0)$ (если она не входит в эту систему) может увеличить размерность замыкания линейной оболочки всех с.ф. самое большее на единицу.

Теорема 5. Система Y не является двукратно полной системой ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$, $0 < \sigma \leqslant 1$, и имеет там бесконечный дефект.

Обозначим через B и A_ρ линейные операторы отображающие $L_2[0,\sigma]$ в $L_2[0,\sigma\tau]$ и $L_2[0,\rho]$ в $L_2[0,\tau-1]$ соответственно и определяемые формулами:

$$(Bf)(x) = f\left(\frac{x}{\tau}\right), x \in [0,\sigma\tau];$$

$$(A_\rho)(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{s} \bar{c}_0^j f(x + j(\tau-1)), & \text{если } x \in [0, \rho - s(\tau-1)]; \\ \sum\limits_{j=0}^{s-1} \bar{c}_0^j f(x + j(\tau-1)), & \text{если } x \in [\rho - s(\tau-1), \tau-1], \end{cases}$$

где s это натуральное число или ноль, удовлетворяющее неравенствам $s(\tau-1) < \rho \leqslant (s+1)(\tau-1)$.

Получим следующие результаты.

Теорема 6. Система Y является полной системой в пространстве $L_2[0,\sigma]$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение

$$(A_\sigma f)(x) = \frac{\bar{a}_0}{\tau}\left(A_{\sigma\tau} Bf\right)(x) = 0, \quad x \in [0, \tau-1] \tag{0.7}$$

имеет только тривиальное решение в $L_2[0,\sigma]$.

Теорема 7. а)Если $0 < \sigma \leqslant 1 - \frac{1}{\tau}$, $\tau > 1$, то система Y полна в пространстве $L_2[0,\sigma]$ при любых $a_0, c_0 \in \mathbf{C}$.

б)Если при некотором $k = 1,2,\ldots$ выполняются неравенства $k(1-\frac{1}{\tau}) < \sigma \leqslant \min\{\tau-1, (k+1)(1-\frac{1}{\tau})\}, \tau > k$, то для полноты системы Y в $L_2[0,\sigma]$ достаточно выполнения условия

$$|a_0|^2 \sum_{j=0}^{k} |c_0|^j \max\{1, |c_0|^k\} < \tau. \tag{0.8}$$

Теорема 8. Для того чтобы система Y была не полна в $L_2[0,\sigma]$ и имела там бесконечный дефект, достаточно:

а) в случае $\sigma > 1 - \frac{1}{\tau}$ выполнения условия

$$\tau < |a_0|^2; \tag{0.9}$$

б) в случае $\sigma > \tau - 1$, где τ удовлетворяет неравенству $k < \tau \leqslant k+1$ при некотором $k = 1,2,\ldots$, выполнения условия (0.8).

В третьем разделе исследуется полнота комбинаций двух экспонент.

Рассмотрим на отрезке $[0,d]$ систему функций

$$Y^0 = \{y_k^0(x) := \gamma_1 e^{i\alpha kx} + \gamma_2 e^{i\beta kx}\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{0.10}$$

где $0 < \alpha < \beta; \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}/\{0\}$ (при $\gamma_1 = 0$ или $\gamma_2 = 0$ получаем обычную систему экспонент, которая хорошо изучена), а $d > 0$. Рассмотрение этой системы на отрезке $[0, d]$ эквивалентно рассмотрению системы

$$\hat{y}_k^0(x) := \gamma_1 e^{i\alpha \frac{2\pi}{\beta-\alpha} kx} + \gamma_2 e^{i\beta \frac{2\pi}{\beta-\alpha} kx}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{0.11}$$

на отрезке $\left[0, \frac{\beta-\alpha}{2\pi} d\right]$. Так как d – произвольно, то можно ставить вопрос об исследовании системы (0.11) при $x \in [0, \sigma]$, где $\sigma = \frac{\beta-\alpha}{2\pi} d$ – также произвольное положительное число. Будем трактовать систему (0.11) как систему собственных функций (с. ф.) квадратичного обыкновенного дифференциального пучка

$$\ell^0(y, \lambda) := y^{(2)} - (\alpha+\beta)\lambda y^{(1)} + \alpha\beta\lambda^2 y, \tag{0.12}$$

$$y^{(1)}(0) - \frac{\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \lambda y(0) = 0, \tag{0.13}$$

$$y^{(1)}(1) - \frac{\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \lambda y(1) = 0. \tag{0.14}$$

Пучок (0.12)–(0.14) является частным случаем следующего квадратичного пучка общего вида, подробно изученного в предыдущей главе,

$$\ell(y, \lambda) := y^{(2)} - 2a\lambda y^{(1)} + b\lambda^2 y, \tag{0.15}$$

$$\alpha_{11} y^{(1)}(0) + \lambda\alpha_{10} y(0) = 0, \tag{0.16}$$

$$\beta_{21} y^{(1)}(1) + \lambda\beta_{20} y(1) = 0, \tag{0.17}$$

где $a, b, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$. Предположим, что корни характеристического уравнения $\omega^2 + 2a\omega + b^2 = 0$ различны и лежат на одном луче, выходящем из начала координат (без потери общности считается, что $0 < \omega_1 < \omega_2$), мы уже получили необходимые и достаточные условия полноты и минимальности в пространстве $L_2(0, \sigma)$ системы

$$Y^1 = \left\{ y_k^1(x) := e^{\frac{x}{\tau-1}(2k\pi i + d_0)} - a_0 e^{\frac{\tau x}{\tau-1}(2k\pi i + d_0)} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где функции $y_k^1(x)$ при $2k\pi i + d_0 \neq 0$ являются с.ф. пучка (0.15)–(0.17); здесь $a_0 = a_1/a_2$, $a_i = \alpha_{11}\omega_i + \alpha_{10}$, $\tau = \omega_2/\omega_1 > 1$, $d_0 = \ln c_0$, $c_0 = c_1/c_2$, $c_1 = a_2 b_1$, $c_2 = a_1 b_2$ $(c_1, c_2 \neq 0)$, $b_i = \beta_{21}\omega_i + \beta_{20}$. Затем, с использованием этих результатов получены различные достаточные условия полноты, минимальности и неполноты с бесконечным дефектом в $L_2[0, \sigma]$ системы Y^1(подробнее об этом мы говорили в последних трех теоремах предыдущей главы).

В четвертом разделе рассматриваются примеры благодаря которым можно проверить программу. Рассмотрим один из них Пример (система полна в $L_2[0, \sigma]$):

$$l_2(y, \lambda) = y'' - 4\lambda y' + 3\lambda^2 y,$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$, получим $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$, соответственно $\omega_1 = 1$, $\omega_1 = 3$. Предположи, что эти корни лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Очевидно, что $0 < \omega_1 < \omega_2$. Функции $y_1(x, \lambda) = e^{\lambda x}$, $\quad y_1(x, \lambda) = e^{3\lambda x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$l_2(y, \lambda) = 0$. Следовательно, для характеристического определителя пучка $L(y)$ справедливо представление:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1, \lambda) & U_1(y_2, \lambda) \\ U_2(y_2, \lambda) & U_2(y_2, \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 = \begin{vmatrix} v_{11} + e^{\lambda\omega_1} w_{11} & v_{12} + e^{\lambda\omega_2} w_{12} \\ v_{21} + e^{\lambda\omega_1} w_{21} & v_{22} + e^{\lambda\omega_2} w_{22} \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2 |V_1 + W_1 e^{\lambda\omega_1}, V_2 + W_2 e^{\lambda\omega_2}| = \lambda^2 \Delta_0(\lambda),$$

где $v_{ij} = \alpha_{j1}\omega_i + \alpha_{j0}$, $w_{ij} = \beta_{j1}\omega_i + \beta_{j0}$, $i, j = 1, 2$, $\quad V_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \end{pmatrix}$, $W_i = \begin{pmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \end{pmatrix}$.

Подставим наши значения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda} & e^{3\lambda} \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \Delta_0(\lambda)$$

Следовательно, раскрывая определитель $\Delta_0(\lambda)$ по столбцам, получим

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 \end{vmatrix} + e^{\lambda\omega_1} \begin{vmatrix} W_1 & V_2 \end{vmatrix} + e^{\lambda\omega_2} \begin{vmatrix} V_1 & W_2 \end{vmatrix} + e^{\lambda\omega_1 + \omega_2} \begin{vmatrix} W_1 & W_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda\omega_1 + \omega_2} a_{12}$$

Если $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$, то это регулярный случай. Если же $a_{12} = 0$ или $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{12} = 0$ или $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$ или $a_{\bar{1}\bar{2}} = 0$ или $a_{1\bar{2}} = a_{\bar{1}\bar{2}} = 0$, то это сильно нерегулярные случаи, которые только могут быть.

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + e^{\lambda} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + e^{3\lambda} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + e^{4\lambda} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e^{3\lambda} - e^{\lambda}.$$

Проверим, наличие полноты. $\Delta(\lambda) = 0$, $e^{2\lambda}$, $2\lambda_k = 2k\pi i \to \{\lambda_k = k\pi i\}$ - с.з.

$y_k(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda_k x} & e^{3\lambda_k x} \end{vmatrix} = e^{3\lambda_k \pi i x} - e^{\lambda_k \pi i x} - c..$ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $k = 0$ не является с.ф. Пусть $f(x) \perp \{y_k\}$, то есть

$$\int_0^1 (e^{3k\pi i x} - e^{k\pi i x}) \overline{f(x)} dx = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{0.18}$$

$$\hat{\hat{f}}(k) = \int_{-1}^{1} e^{k\pi i x} \hat{\hat{f}}(x) dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Продолжим функцию $f(x)$ нечетным образом на $[-1, 0]$, то есть

$$(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 1], \\ -f(-x), & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Известно, что система $\{e^{k\pi i x}\}$ есть обычная тригонометрическая система на отрезке $[-1, 1]$, которая есть ортонормированный базис на этом отрезке. Обозначим коэффициенты Фурье, функции (x), по этой системе, как $\hat{\hat{f}}(k)$. Тогда из (0.18) получим для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что при фиксированном k

$$\int_{-1}^{1} (e^{3k\pi i x} - e^{k\pi i x}) \overline{f(x)} dx = \int_0^1 (e^{3k\pi i x} - e^{k\pi i x}) \overline{f(x)} dx + \int_{-1}^{0} (e^{3k\pi i x} - e^{k\pi i x}) \overline{-f(-x)} dx =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{0}(e^{3k\pi ix} - e^{k\pi ix})\overline{f(-x)}dx = \int\limits_{0}^{1}(e^{-3k\pi ix} - e^{-k\pi ix})\overline{f(x)}dx =$$

$$= -\int\limits_{0}^{1}(e^{-3k\pi ix} - e^{-k\pi ix})\overline{f(x)}dx = 0$$

Таким образом,

$$\hat{\tilde{f}}(k) = \hat{\tilde{f}}(3k) = \hat{\tilde{f}}(9k) = \cdots = \hat{\tilde{f}}(3^n k). \tag{0.19}$$

Так как из математического анализа [?] известно, что

$$\hat{f}(k) \to 0 \quad \text{из } k \to \infty,$$

$$\hat{\tilde{f}}(k) = \int\limits_{-1}^{1} e^{k\pi ix}(x)dx,$$

то из (0.19) получим $\forall k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$\tilde{f}(k) = \lim_{n\to\infty}(3^n k) = 0$$

$\tilde{f}(x) \equiv 0$ на $[-1, 1]$.

Тем самым, доказали полноту системы с.ф.

В приложении приводится программа, реализованная на языке C++, для пучков операторов $L^1(\lambda)$ и $L^2(\lambda)$, рассматриваемого в разделе 1 и 2. В зависимости от введённых параметров, а именно p_1, p_2, $\alpha_{\nu 1}, \alpha_{\nu 2}, \beta_{\nu 1}, \beta_{\nu 2}$ при $\nu = 1, 2$, программа согласно условиям теорем из этих разделов выводит на экран сообщение о полноте системы и величине параметра σ или, в противном случае, о том, что при данных условиях о полноте вести речь нельзя.

Различные случаи выполнения программы для пучка $L^2(\lambda)$ с распадающимися краевыми условиями:

Проверим программу для пучока $L^2(\lambda)$, определяемого дифференциальним выражением:

$$l_2(y, \lambda) = y'' - 4\lambda y' + 3\lambda^2 y.$$

С распадающимися краевыми условиями вида:

$$U_1(y, \lambda) := y(0) = 0,$$

$$U_2(y, \lambda) := y(1) = 0, \quad y(0) = y(0) = 0.$$

Первым делом, вводим необходимые $p_1 = -4$ и $p_2 = 3$

```
const double p1=-4;
const double p2=3;
const double lambda=1;
```

Рисунок 1 — Подстановка нужных значений в программу.

Затем, запускаем программу и вводим необходимые параметры.

Результат программы показал, что данная система 2-кратно не полна по теореме (5) и 1-кратно полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ по теореме (7).

Это сходится с результатом из первой главы, значит программа работает верно.

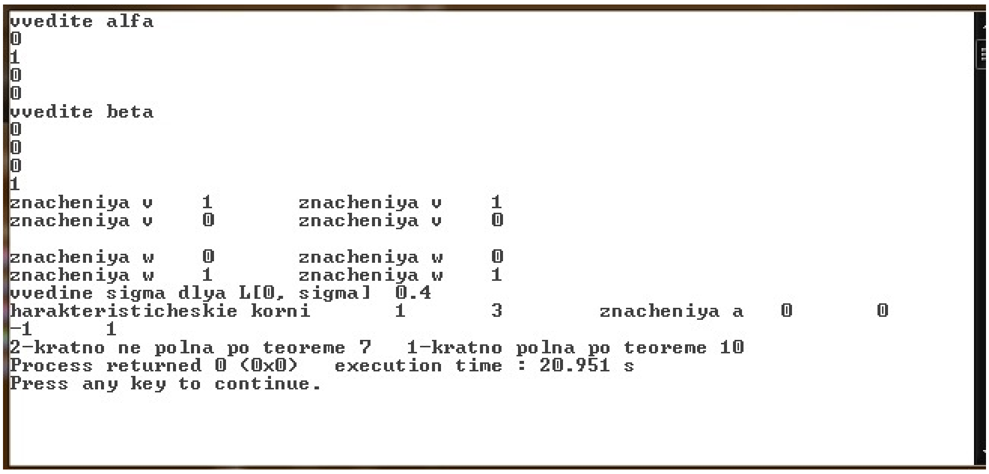

Рисунок 2 — Выполнение программы для первого случая.

Рассмотрим случай с теми же значениями p_1, p_2.

$$l_2(y, \lambda) = y'' - 4\lambda y' + 3\lambda^2 y.$$

С краевыми условиями вида:

$$U_1(y, \lambda) := y^{(1)}(0) = 0,$$

$$U_2(y, \lambda) := y^{(1)}(0) + 3y(0) + y^{(1)}(1) - 3y(1) = 0,$$

Результат проверки показал, что с данными параметрами не возможно найти решение по этим теоремам.

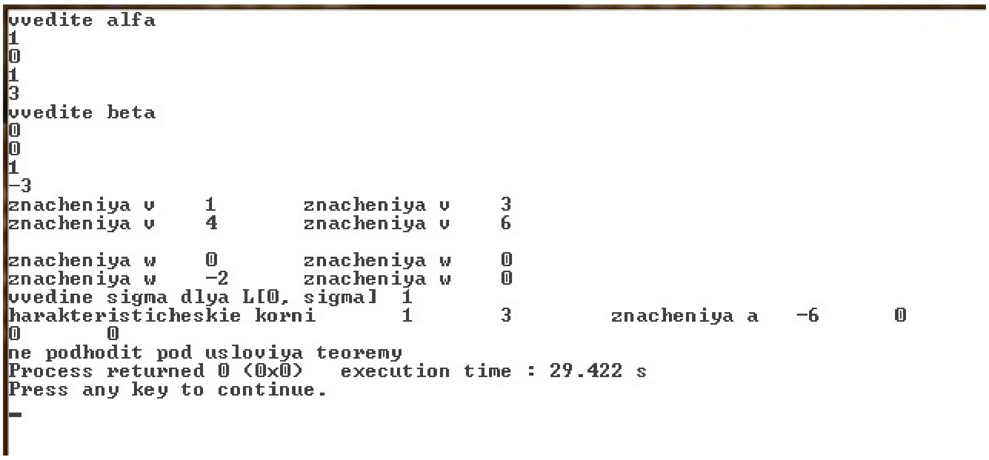

Рисунок 3 — Выполнение программы для второго случая.

Заключение. В бакалаврской работе рассмотрен вопрос нахождения условий на коэффициенты пучка $L_0(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. Изучен частный случай, когда эти условия неприменимы. Для этого случая теорема полноты также получена и на основании ее условий написана программа на языке программирования Java, отражающая результаты выполнения этих условий.