МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и прикладной математики

Поведение формального решения по методу Фурье смешанной

задачи для волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки _____ 4 курса _____ 411 Группы

направления _____ 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

_____ механико-математического факультета

_____ Пшенниковой Любви Леонидовны

Научный руководитель

_____ зав. каф., д.ф.м.н., профессор

_____ А.П. Хромов

Заведующий кафедрой

_____ зав. каф., д.ф.м.н., профессор

_____ А.П. Хромов

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ. Целью данной работы является изучение поведения формального решения по методу Фурье смешанной задачи для волнового уравнения при произвольных двухточечных граничных условиях и начальном условии $\varphi(x)$ (при нулевой начальной скорости) с более слабыми требованиями гладкости, чем это требуется для классического решения. Используется подход, основанный на методе Коши–Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного соответствующей спектральной задачей. Находятся условия, дающие решение смешанной задачи, когда волновое уравнение удовлетворяется лишь почти всюду. В случае, когда $\varphi(x)$ есть произвольная функция из $L_2[0, 1]$, формальное решение сходится почти всюду и является обобщенным решением смешанной задачи.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Постановка задач. Основные понятия. Рассмотрим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и граничных условиях следующих трех видов:

$$\text{а) } u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad (3)$$

$$\text{б) } u'_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = 0, \quad (4)$$

$$u'_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0; \quad (5)$$

$$\text{в) } u'_x(0, t) + \beta u'_x(1, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = 0, \quad (6)$$

$$\alpha u(0, t) + u(1, t) = 0. \quad (7)$$

Считаем, что $q(x) \in C[0, 1]$ и комплекснозначна, $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \dots$ – комплексные числа. Условие $u'_t(x, 0) = 0$ берется для простоты. Граничные условия а)–в) охватывают все линейные двухточечные граничные условия (условие в)), в которых β стоит перед $u'_x(0, t)$, α – перед $u(1, t)$, сводятся к (6), (7) заменой $x = 1 - \xi$ и поэтому не идут в счет.

Решение первой смешанной задачи. В этом разделе рассмотрим задачу (1)–(3). Предполагаем, что $q(x) \in C[0, 1]$ и комплекснозначна, а $\varphi(x) \in W_2^2[0, 1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ($W_2^2[0, 1] = \{f(x) \in C^1[0, 1] \mid f'(x) \text{ абсолютно непрерывна на } L_2[0, 1]\}$). Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Известно, что собственные значения оператора L , достаточно большие по модулю, простые и для них верна асимптотика:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = n\pi + o(1), \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots$$

Положим $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geq n_0$ внутрь $\tilde{\gamma}_n$ попадает лишь по одному ρ_n . Пусть γ_n есть образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ -плоскости ($\lambda = \rho^2$). Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos pt d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi) \cos pt d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi) \cos pt d\lambda, \end{aligned} \quad (8)$$

где $r > 0$ фиксировано, на $|\lambda| = r$ нет собственных значений, все собственные значения $|\lambda_n| > r$ попадают лишь внутрь γ_n .

Лемма 1. Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L и таково, что $|\mu_0| > r$ и μ_0 не находится внутри и на границе γ_n ни при каком $n \geq n_0$. Тогда

$$\int_{\gamma} (R_{\gamma}\varphi) \cos p t d\lambda = \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_{\lambda}g) \cos p t d\lambda$$

где $g = (L - \mu_0 E)\varphi$ ($g \in L_2[0, 1]$), γ – один из контуров $|\lambda| = r$ или γ_n при $n \geq n_0$.

Теорема 1. Для формального решения $u(x, t)$ имеет место формула

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t),$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_{\lambda}^0 g) \cos p t d\lambda,$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_{\lambda}g - R_{\lambda}^0 g] \cos p t d\lambda,$$

$R_{\lambda}^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0 , который есть оператор L при $q(x) \equiv 0$ (считаем, что вышеприведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0).

Займемся исследованием $u_0(x, t)$.

Лемма 2. Имеет место соотношение

$$R_{\lambda}^0 g = \varphi_1 + (\lambda - \mu_0) R_{\lambda}^0 \varphi_1,$$

где $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$.

Лемма 3. Имеет место формула

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_{\lambda}^0 \varphi_1) \cos p t d\lambda. \quad (9)$$

Обозначим через $z_1(x, \rho)$ и $z_2(x, \rho)$ решения уравнения

$$y''(x) - q(x)y(x) + \rho^2 y(x) = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0, \rho) = 1, \quad z_1'(0, \rho) = 0, \quad z_2(0, \rho) = 0, \quad z_2'(0, \rho) = 1.$$

Теорема 2. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = -z_2(x, \rho)(f, z_1) + v(x, \rho)(f, z_2) + (M_\rho f)(x), \quad (10)$$

$$\text{где } v(x, \rho) = \frac{z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)}{z_2(1, \rho)} \quad (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

$$(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x, t, \rho)f(t)dt, \quad M(x, t, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \\ z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \end{vmatrix}$$

Лемма 4. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \sin n\pi t. \quad (13)$$

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)],$$

где $\Phi(x) \in W_2^2[-A, A]$ при любом $A > 0$,

$\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(2+x) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \varphi_1(x)$ при $x \in [0, 1]$.

Лемма 6. *Производные $\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2}$ существуют почти всюду в $Q_T = [0, 1] \times [-T, T] = \{x, t | x \in [0, 1], t \in [-T, T]\}$, и для таких x и t справедливо*

$$\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Теорема 3. *Функция $u_0(x, t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$; $u_{0x}(x, t)$ ($u_{0t}(x, t)$) абсолютно непрерывна по x (по t); $\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2}$*

и $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}$ конечны почти всюду по x и t и для них выполняется (14) и еще для всех $x \in [0, 1]$, $t \in (-\infty, \infty)$ и (2), (3), т.е. $u_0(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3) при $q(x) \equiv 0$ и $\varphi_1(x)$ вместо $\varphi(x)$, когда дифференциальное уравнение (14) выполняется лишь почти всюду.

Теперь исследуем ряд $u_1(x, t)$. Имеем

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v(x, \rho)(g, z_2) - v^0(x, \rho)(g, z_2^0)] \cos \rho t d\lambda.$$

Это утверждение следует из леммы 1, теоремы 2 и того, что первое и третье слагаемые в (10) целые по λ .

Теорема 4. В полосе $|Im| \leq h$ ($h > 0$ и любое) имеют место асимптотические формулы

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad z_1'(x, \rho) = -\rho \sin \rho x + O(1)$$

,

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad z_2'(x, \rho) = \cos \rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

, где оценки $O(\dots)$ равномерны по $x \in [0, 1]$.

Теорема 5. Для $z_2(x, \rho)$ имеет место формула

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K_2(x, t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt, \quad (15)$$

где $K_2(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и $K_2(x, 0) \equiv 0$.

Лемма 7. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы

$$v_{x^j}^{(j)}(x, \rho)(g, z_2) = v_{x^j}^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0, 1, 2.$$

Лемма 8. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место соотношения

$$v_{x^j}^{(j)}(x, \rho)(g, z_2) - v_{x^j}^{0(j)}(x, \rho)(g, z_2^0) = v_{x^j}^{0(j)}(x, \rho)(g, z_2 - z_2^0) + O(\rho^{j-1}(g, z_2)), \quad j = 0, 1, 2.$$

Лемма 9. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место формулы

$$(g, z_2) = \rho^{-1}[g_1(\xi)\cos\mu\xi, \sin n\pi\xi) + g_1(\xi)\sin\mu\xi, \cos n\pi\xi)],$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \rho^{-2}[g_2(\xi)\cos\mu\xi, \sin n\pi\xi) - g_2(\xi)\sin\mu\xi, \cos n\pi\xi)].$$

Лемма 10. Обозначим через $\psi(x)$ функции $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x, \mu) = f(x)\psi(\mu x)$, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, $\beta_n(\mu) = (f(x, \mu), \psi(n\pi x))$, $f(x) \in L_2[0, 1]$. Тогда верна оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(\mu)| \leq c \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}, \quad (16)$$

где c не зависит от n_1 , n_2 и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$

Лемма 11. Ряды $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)$, $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x, t)$, $j = 0, 1, 2$, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$ при любом фиксированном $T > 0$

Лемма 12. Ряд $u_1(x, t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием до второго порядка по x и t , сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$.

Теорема 6. Функция $u(x, t)$ есть решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u(x, t) - u_0(x, t)) = -q(x)u(x, t) \quad (20)$$

при условиях (2), (3).

Теорема 7. Функция $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$; $u'(x, t)$ абсолютно непрерывна по x (по t); $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, конечны почти всюду по x и t и в этом случае выполняется (1), а для всех x и t еще и (2), (3), т.е. $u(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3), когда (1) выполняется лишь почти всюду.

Решение второй смешанной задачи. В этом разделе рассмотрим такую смешанную задачу: уравнение (1) и начальные условия (2) сохраняются, а вот

вместо (3) берем условия б), т.е. условия (4), (5). Сначала рассмотрим случай, когда комплекснозначная функция $\varphi(x) \in W_2^2[0, 1]$ и

$$U_1(\varphi) = \varphi'(0) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = 0, \quad (27)$$

$$U_2(\varphi) = \varphi'(1) + \alpha_2\varphi(0) + \beta_2\varphi(1) = 0, \quad (28)$$

Оператор L теперь имеет вид

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad U_1(y) = U_2(y) = 0.$$

Собственные значения оператора L , достаточно большие по модулю, простые, и для них верна асимптотика из п. 1. Контур γ_n и $\tilde{\gamma}_n$ те же, что и в разд. 1. Формальное решение (8) сохраняется; теорема 1 сохраняется, только теперь оператор L_0 другой, а именно

$$L_0y = -y''(x), \quad y'(0) = y'(1) = 0,$$

т.е. мы берем оператор L_0 как и прежде, но краевые условия теперь получаем из (4), (5), полагая в них $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2$.

Теорема 9. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) + (M_\rho f)(x),$$

где $M_\rho f$ – прежний оператор,

$$v_j(x, \rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)} \{ [-\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_2) + (z'_{3-j}(1, \rho) + \beta_2 z_{3-j}(1, \rho)) U_1(z_2)] z_1(x, \rho) +$$

$$+ [\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_1) - (z'_{3-j}(1, \rho) \beta_2 z_{3-j}(1, \rho)) U_1(z_1)] z_2(x, \rho) \}, \quad j = 1, 2,$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1).$$

Теорема 10. *Имеет место формула*

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + \int_0^x K_1(x, \xi) \cos \rho \xi d\xi,$$

где $K_1(x, \xi)$ непрерывно дифференцируема по x и ξ .

Лемма 17. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0(x, t),$$

где $u_0^0(x, t) = (\varphi_1, 1)$, $u_n^0(x, t) = a_n \cos \rho_n^0 x \cos \rho_n^0 t$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n = 2(\varphi_1(\xi), \cos \rho_n^0 \xi)$, $\rho_n^0 = n\pi$.

Эта лемма получается так же, как и лемма 4, по теореме вычетов.

Лемма 18. *Для функций $u_n^0(x, t)$ справедливы формулы*

$$u_n^0(x, t) = \frac{1}{2}[v_n(x+t) + v_n(x-t)], \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $v_0(x) = u_0^0$, $v_n(x) = a_n \cos \rho_n^0 x$, $n = 1, 2, \dots$.

Лемма 19. *Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} v_n'(x)$ сходятся абсолютно и равномерно по x из $(-\infty, \infty)$.*

Как и лемма 5, получается

Лемма 20. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2}\{\Phi(x+t) + \Phi(x-t)\},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \in W_2^2[-A, A], \quad \Phi(x) = \Phi(-x), \\ \Phi(2+x) &= \Phi(x), \quad \Phi(x) = \varphi_1(x), \quad \text{при } x \in [0, 1], \end{aligned}$$

Лемма 6 и теорема 3 сохраняются, только теперь $u_0(x, t)$ есть решение (1), (2) при $q(x) \equiv 0$ с условиями $u'_{0,x}(0, t) = u'_{0,x}(1, t) = 0$ и $\varphi_1(x)$ вместо $\varphi(x)$.

Решение третьей смешанной задачи.

Наконец, рассмотрим такую смешанную задачу: уравнение (1) и условие (2) сохраняются, а вместо (3) берем условия в), т.е. условия (6) и (7). Рассмотрим случай $\varphi(x) \in W_2^2[0, 1]$ и

$$U_1(\varphi) = \varphi'(0) + \beta\varphi'(1) + \alpha_1\varphi(0) + \beta_1\varphi(1) = 0,$$

$$U_2(\varphi) = \alpha\varphi(0) + \varphi(1) = 0.$$

Оператор L имеет вид

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad U_1(y) = U_2(y) = 0.$$

Дополнительно будем считать, что

$$1 + \alpha\beta \neq 0.$$

Теорема 11. *Собственные значения оператора образуют две последовательности: $\lambda_n = \rho_n^2$ и $\lambda'_n = \lambda_n'^2$ ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re} \rho \geq 0$) с асимптотикой: $\rho_n = 2n\pi + \xi_1 + o(1)$, $\rho'_n = 2n\pi + \xi_2 + o(1)$, $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, где $\xi_{1,2} = -i \ln(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$, $d = -(\alpha + \beta)(1 + \alpha\beta)^{-1}$.*

Формальное решение (8) сохраняется, сохраняется и теорема 1, только теперь оператор L_0 , есть

$$L_0 u = -u''(x), \quad U_1^0(y) = y'(0) + \beta y'(1) = 0, \quad U_2^0(y) = \alpha y(0) + y(1) = 0.$$

Теорема 12. *Для $R_\lambda f$ имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) + (M_\rho f)(x), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} v_1(x, \rho) &= \frac{1}{\Delta(\rho)} \{ [U_2(z_2)(\beta z_2'(1, \rho) + \beta_1 z_2(1, \rho)) - U_1(z_2)z_2(1, \rho)] z_1(x, \rho) + \\ &\quad + [U_1(z_1)z_2(1, \rho) - U_2(z_1)(\beta z_2'(1, \rho) + \beta_1 z_2(1, \rho))] z_2(x, \rho) \}, \\ v_2(x, \rho) &= \frac{1}{\Delta(\rho)} \{ [U_2(z_2)(\beta z_1'(1, \rho) + \beta_1 z_1(1, \rho)) - U_1(z_2)z_1(1, \rho)] z_1(x, \rho) + \\ &\quad + [U_1(z_1)z_1(1, \rho) - U_2(z_2)(\beta z_1'(1, \rho) + \beta_1 z_1(1, \rho))] z_2(x, \rho) \}, \end{aligned}$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1), \quad \Delta(\rho) \neq 0.$$

Леммы 2 и 3 сохраняются. Положим

$$\Omega_\rho(g)(x) = v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0).$$

Отметим, что $\Omega_\rho(g)(x)$ определена при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Положим $w(x) = \sum_{n \geq n_0} w_n(x)$, где

$$w_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \Omega_\rho(g)(x) d\lambda.$$

Лемма 21. *Ряды $\sum w_n(x)$ и $\sum w'_n(x)$ сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке из $(-\infty, \infty)$.*

Лемма 22. *Если $x \in [0, 1]$, то $\Phi(x) = \varphi_1(x)$.*

Лемма 23. *При любом $A > 0$ $\Phi(x) \in W_2^2[-A, A]$ и*

$$\Phi(-x) = \frac{1}{1 + \alpha\beta} [(1 - \alpha\beta)\Phi(x) - 2\beta\Phi(1 - x)], \quad (33)$$

$$\Phi(1 + x) = \frac{1}{1 + \alpha\beta} [-2\alpha\Phi(x) + (\alpha\beta - 1)\Phi(1 - x)]. \quad (34)$$

Из (35) по леммам 22 и 23, как и выше, получаем следующее утверждение.

Лемма 26. *Функция $u_0(x, t)$ является решением задачи (1), (2) с условиями*

$$u'_{0x}(0, t) + \beta u'_{0x}(1, t) = \alpha u_0(0, t) + u_0(1, t) = 0$$

при $q(x) \equiv 0$ и $\varphi_1(x)$ вместо $\varphi(x)$, а дифференциальное уравнение (1) удовлетворяется лишь почти всюду.

Далее, для $u_1(x, t)$ и $a_n(x, t)$ имеют место формулы (29) и (30), что, как и выше, приводит к теоремам 6 и 7, только теперь вместо (3) берем (6), (7).

Результаты, схожие с результатами из разд. 2, имеют место и в этом случае, но получаются они сложнее и мы их поэтому сейчас не приводим.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В данной работе изучен вопрос поведения формального решения по методу Фурье смешанной задачи для волнового уравнения при произвольных двухточечных граничных условиях и начальном условии $\varphi(x)$ (при нулевой начальной скорости) с более слабыми требованиями гладкости, чем это требуется для классического решения. В теоретических главах работы были рассмотрены 4 смешанные задачи.

В практической части разработано консольное приложение на языке C++ в интегрированной среде разработки программного обеспечения Microsoft Visual Studio, в котором для заданного комплексного потенциала q реализован подсчёт заданного количества собственных значений оператора, порождаемого спектральной задачей по методу Фурье.