МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и прикладной математики

Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче
для волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 Группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Родионова Антона Станиславовича

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор А.П. Хромов

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор А.П. Хромов

Саратов 2019

Введение. В бакалаврской работе рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x) \cdot u(x,t), x \in [0;1], t \in (-\infty, \infty) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u'(x,0) = 0 \tag{3}$$

при краевых условиях

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{4}$$

где q(x) $\in C[0;1]$ и комплекснозначна, а $\varphi(x) \in C^2[0;1]$.

Как известно, классический метод Фурье даёт решение этой смешанной задачи при $\varphi(x) \in C^3[0;1]$. А для представления классического решения в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \cdot T_k(t) \tag{5}$$

требуется информация о собственных функциях оператора L, порождаемого спектральной задачей вида

$$X''(x) - q(x) \cdot X(x) + \rho^2 \cdot X(x) = 0, \tag{6}$$

$$X(0) = X(1) = 0 \tag{7}$$

по методу Фурье.

Предложенный впервые А. П. Хромовым резольвентный подход - это новый способ использования приёма А. Н. Крылова усиления скорости сходимости рядов Фурье, опирающийся на метод Коши-Пуанкаре интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей по методу Фурье. Резольвентный подход в методе разделения переменных позволяет не прибегать к завышенным требованиям гладкости начальных данных и не использовать никакую информацию о собственных и присоединённых функциях соответствующей спектральной задачи для обоснования метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения, но сохраняет необходимость знания главных частей асимптотик собственных значений. А это означает, что рассматриваемый в бакалаврской работе подход позволяет ослабить требования классического метода Фурье.

Актуальность этой работы обсуловлена тем, что науке и производству приходится сталкиваться с такими функциями, описывающими начальные данные, гладкость которых не удовлетворяет классическим требованиям метода Фурье. Применение резольвентного подхода к методу Фурье позволяет работать с начальными данными, требования для которых минимальны, а именно функция, описывающая начальные данные должна быть непрерывно дифференцируемой дважды в каждой точке рассматриваемого отрезка. В консольном приложении приведена численная реализация подсчёта значений резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей по методу Фурье, при заданных параметре ρ, такого что $\lambda = \rho^2$, и значении постоянной q(x). По значениям, полученным в ходе выполнения программы, строится график функции y = R_λf.

Целью представленной бакалаврской работы является рассмотрение резольвентного подхода к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения, получение решения смешанной задачи с условием закрепления при минимальных требованиях к начальным данным и комплекснозначной q(x), реализация подсчёта с помощью ЭВМ значений резольвенты для заданных q и ρ. По значениям, полученным в ходе выполнения программы, строится график функции y = R_λf, который должен удовлетворять определённым условиям.

Полученные в работе теоретические и практические результаты позволяют при использовании резольвентного подхода к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения отыскать отклонение струны от положения равновесия, зная лишь функцию, задающую описание начального положения струны, которая является непрерывно дифференцируемой дважды, и главные части асимптотик собственных значений оператора, порождаемого спектральной задачей по методу Фурье.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Асимптотика фундаментальной системы решений уравнения y''(x) - q(x) $\cdot$ y(x)+ρ^2 $\cdot$ y(x)=0. В этой главе рассмотрено исследование асимптотики фундаментальной системы решений уравнения y''(x) - q(x) $\cdot$ y(x)+ρ^2 $\cdot$ y(x)=0, которые понадобятся для рассмотрения резольвентного подхода, определена постановка задачи, рассмотрены свойства собственных значений и собственных функций рассматриваемой задачи.

При больших значениях параметра $|\rho|$ вполне возможно получить приближённые, ассимптотические, формулы для собственных значений и собственных функций дифференциального оператора

$$l(y) = y'' - q(x) \cdot y, \tag{8}$$

где q(x) - непрерывная на отрезке [a,b] функция, принимающая комплексные значения, а $-\rho^2$=λ.

Обратимся к ассимптотическому поведению при больших $|\rho|$ решений уравнения

$$l(y) + \rho^2 \cdot y(x) = 0 \tag{9}$$

Или

$$y''(x) - q(x) \cdot y + \rho^2 \cdot y(x) = 0 \tag{10}$$

В дальнейшем, не нарушая общность, будем считать, что интервал [a;b] - это интервал [0;1].

Краевые условия с использованием вышеописанного метода принимают вид

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{11}$$

От расположения рассматриваемого собственного значения, а именно от того, в какой части комплексной плоскости оно находится, зависит асимптотическое поведение решения.

Разбиваем всю комплексную ρ-плоскость на 4 сектора S_0,S_1, S_2, S_3, которые определяются неравенством для r = 0, 1, 2, 3

$$\frac{r \cdot \pi}{2} \leqslant arg\rho \leqslant \frac{(r+1) \cdot \pi}{2}. \tag{12}$$

Положим следующее. Для каждого приведённого выше сектора возможна запись собственных значений в порядке возрастания

$$|\rho_1| \leqslant |\rho_2| \leqslant |\rho_3| \leqslant \dots \tag{13}$$

Для получения асимптотики собственных функций необходимо знать асимптотику собственных значений рассматриваемого оператора L.

Теорема 1. Все λ_k достаточно большие по модулю, простые и для них справедлива асимптотика

$$\sqrt{\lambda_k} = \pi \cdot k + \frac{\nu}{k} + \frac{\nu_k}{k}, k = k_0, k_0 + 1, \dots \tag{14}$$

в которой ν и ν_k - произвольные числа, такие, что $\sum |\nu_k|^2 < \infty$.

Теорема 2 (Асимптотическая формула для y_1(x, ρ)).

$$y_1(x, \rho) = e^{\rho i x}[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] \tag{15}$$

Теорема 3 (Асимптотическая формула для y_1'(x, ρ)).

$$y_1'(x, \rho) = \rho i \cdot e^{\rho i x}[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] \tag{16}$$

Теорема 4 (Асимптотическая формула для y_2(x, ρ)).

$$y_2(x, \rho) = e^{-\rho i x}[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] \tag{17}$$

Теорема 5 (Асимптотическая формула для y_2'(x, ρ)).

$$y_2' = (-\rho i) \cdot e^{-\rho i x}[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)] \tag{18}$$

Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения. В данной главе рассматривается использование резольвентного подхода к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения и приводится отыскание классического решения смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x) \cdot u(x,t); x \in [0;1]; t \in (-\infty;\infty)$$

с условием закрепления на концах при минимальных требованиях на начальные данные при q(x) комплексной и непрерывной.

Использование резольвентного подхода к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения рассмотрим на следующей смешанной задаче, а именно рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x) \cdot u(x,t); x \in [0;1]; t \in (-\infty;\infty); \tag{19}$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), {u_t}'(x,0) = 0, \tag{20}$$

и краевых условиях вида

$$u(0,t)=u(1,t)=0. \tag{21}$$

Пусть функция $q(x)$ непрерывна на [0;1] и комплекснозначна. Равенство нулю начальной скорости взято для простоты.

Перейдём к детальному рассмотрению и получению решения смешанной задачи для уравнения (19) с начальными условиями (20) и с краевыми условиями вида (21).

Считаем, что

$$\varphi(x) \in C^2[0;1], \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \tag{22}$$

Условия (22) являются минимальными для существования классического решения. Условие u'_t=0 берём для простоты.

Классическим решением задачи (19)-(21) является функция $u(x,t)$, непрерывно дифференцируемая дважды и удовлетворяющая (19)-(21).

Резольвентный подход позволяет представить решение задачи (19)-(21) в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n})(R_\lambda\varphi)cos\rho t d\lambda \tag{23}$$

где $r{>}0$ фиксировано и такое, что все собственные значения, по модулю меньшие, чем r, имеют номера меньше n_0, на контуре $|\lambda|{=}r$ нет собственных значений, $\varphi(x) \in C^2[0;1]$, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$.

Для резольвенты имеет место формула

$$(R_\lambda\varphi)(x) = -z_2(x,\rho)(\varphi,z_1) + v(x,\rho)(\varphi,z_2) + (M_\rho\varphi)(x), \tag{24}$$

в которой

$$v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho)\cdot z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}, \tag{25}$$

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx, \tag{26}$$

$$(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x,t,\rho)\cdot f(t)dt, \tag{27}$$

$$M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \\ z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \end{vmatrix} \tag{28}$$

Через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ обозначены решения уравнения

$$y'' - q(x)\cdot y + \rho^2\cdot y = 0$$

с начальными условиями:

$$z_1(0,\rho) = 1, z_1'(0,\rho) = 0,$$

$$z_2(0,\rho) = 0, z_2'(0,\rho) = 1.$$

По методу Фурье сталкиваются с спектральной задачей

$$y'' - q(x)\cdot y + \rho^2\cdot y = 0, \tag{29}$$

$$y(0) = 0, \tag{30}$$

$$y(1) = 0, \tag{31}$$

где $\rho^2 = \lambda$.

Эта задача порождает оператор

$$Ly = y'' - q(x) \cdot y = -\rho^2 \cdot y.$$

Для того, чтобы воспользоваться резольвентным подходом, необходимо знать асимптотику главных частей собственных значений оператора L.

Лемма 1. Для собственных значений оператора L, достаточно больших, простых имеют место асимптотические формулы

$$\lambda_m = \rho_m^2, \rho_m = \pi \cdot m + O\left(\frac{1}{m}\right), m = m_0, m_0 + 1, \ldots . \tag{32}$$

Теорема 6 (О классическом решении)**.** Формальный ряд (23) сходится к классическому решению задачи (19)-(21) при минимальных условиях (22) на φ(x).

Программное вычисление резольвенты. В этом разделе продемонстрирован ход разработки консольного приложения, написанного на языке C++ в интегрированной среде разработки программного обеспечения Microsoft Visual Studio, которому на вход идут файл с записанными построчно значениями действительной и мнимой части значений функции, описывающей начальное положение струны, комплексное число q и комплексное число ρ, относительно которого число λ представляется как $\lambda_m = \rho_m^2$, и точка x$\in$ $[0; 1]$, в которой и будет посчитана $R_\lambda\varphi$(x). На выходе имеем значение $R_\lambda\varphi$(x) в заданных точках x из отрезка [0;1] при заданных комплексных или действительных числах q и ρ. Значения функций $z_1(x, \rho)$ и $z_2(x, \rho)$ в формуле для $R_\lambda\varphi$(x)

$$(R_\lambda\varphi)(x) = -z_2(x, \rho)(\varphi, z_1) + v(x, \rho)(\varphi, z_2) + (M_\rho\varphi)(x)$$

находятся четырёхшаговым методом Рунге-Кутты с использованием замены для приведения дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, а значения интегралов (φ, z_1), (φ, z_2) ищутся по составной формуле Симпсона для равноотстающих узлов, а $(M_\rho\varphi)$ по составной формуле правых прямоугольников.

Для построения графиков используется программа gnuplot, распространяемая бесплатно.

Для заданных 31-ого значения на отрезке [0;1] функции

$$\varphi(x) = sinx\pi, \tag{33}$$

при q = 2 и $\rho = 4$ получаем, что график имеет вид 1.

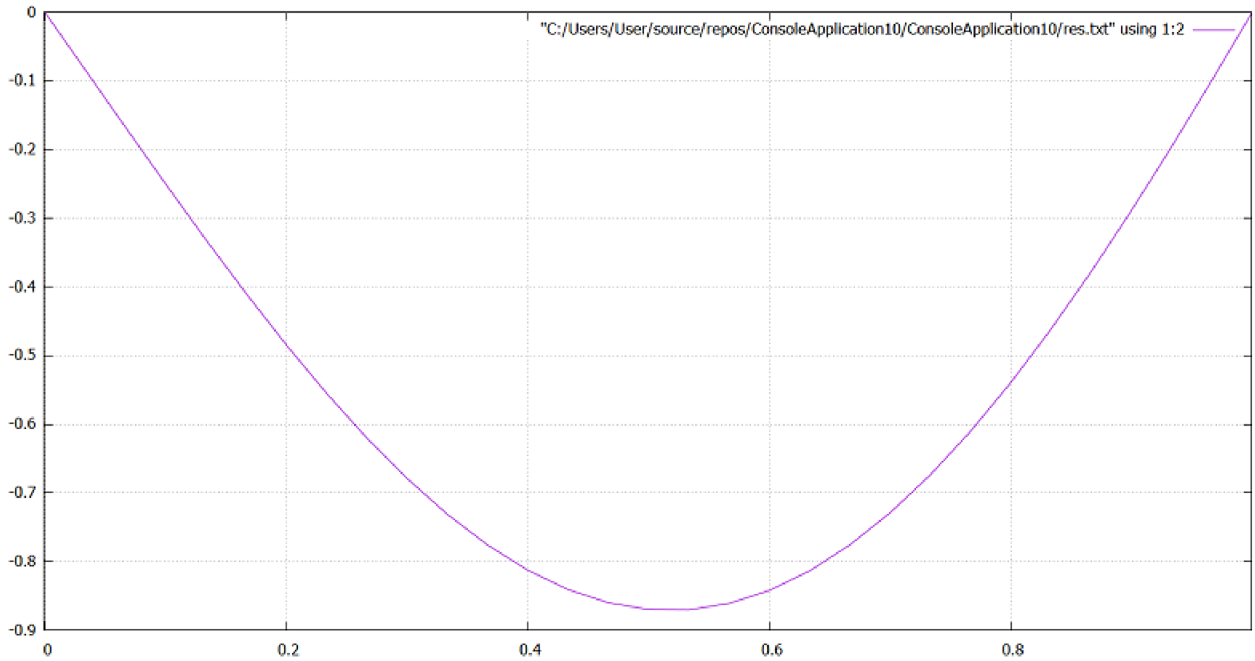

Рисунок 1: q = 2,$\rho = 4$,$\varphi(x) = sinx\pi$.

Приложение А. В приложении А к бакалаврской работе приведён код консольного приложения, реализующий подсчёт резольвенты и дающий значения функции y = $R_\lambda\varphi$, по которым строится её график. Консольное приложение написано на языке C++ в интегрированной среде разработки программного обеспечения Microsoft Visual Studio, распространяемой бесплатно. На вход приложению идут значения функции φ(x), заданные поточечно, комплексные или действительные потенциал q и параметр ρ.

Заключение. В данной работе были рассмотрены некоторые аспекты обоснования резольвентного подхода к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения при условии закрепления и минимальных требованиях для φ(x) при потенциале q(x) комплексном и непрерывном.

Рассмотрена асимптотика фундаментальной системы решений уравнения

$$y''(x) - q(x) \cdot y(x) + \rho^2 \cdot y(x) = 0.$$

Определена постановка задачи Штурма-Лиувилля, с которой сталкиваются в ходе решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения. Были исследованы свойства собственных значений и собственных функций.

Рассмотрен резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения. Сформулирована и доказана теорема о классическом решении смешанной задачи для волнового уравнения с использованием резольвентного подхода.

Приведён ход разработки консольного приложения на языке программирования C++, в котором приведена численная реализация подсчёта $(R_\lambda\varphi)(x)$ в узлах x, на которые разбивается отрезок [0;1], где значения функции $\varphi(x)$ на отрезке [0;1] задаются поточечно, а значение комплекснозначного потенциала q, являющегося комплекснозначной постоянной, и значение ρ, такое, что собственное значение $\lambda_m = \rho_m^2$, вводятся пользователем приложения. Программа возвращает значения функции, по которым строится график.

Рассмотренное убеждает в том, что резольвентный подход позволяет работать с начальными данными, требования для которых минимальны ($\varphi(x) \in C^2$[a;b]) , и не требует никакую информацию о собственных и присоединённых функциях.