МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и прикладной математики

Разложение по корневым функциям сильно нерегулярного пучка второго порядка с полураспадающимися краевыми условиями

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 Группы
направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Тельнова Владимира Вячеславовича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ______ В. П. Курдюмов
подпись, дата

Руководитель практики
д.ф.-м.н., профессор ______ А. П. Хромов
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Многие вопросы математической физики приводят к задаче определения собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов и разложения произвольной функции в ряд(или интеграл) по собственным функциям. Так, например, к такого рода вопросам приходят всегда, применяя метод Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего данным начальным и краевым условиям. Поэтому дифференциальные операторы привлекали и привлекают большое внимание и имеется много работ, им посвященных.

В случаях регулярного или почти регулярного пучка все вопросы о разложении уже решены. В случаях же слабо нерегулярного или сильно нерегулярного пучка еще остаются нерешенные вопросы.

В данной работе решена задача нахождения условий на вектор-функция $f = (f_0, f_1)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость этой вектор-функции в биортогональный ряд Фурье по корневым элементам пучка $L(\lambda)$.

Задачи о разложении для простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов 1-го и 2-го порядков со знакопеременной весовой функцией были решены в [1]. А именно рассматривались операторы

$$y' - \lambda p(x)y, \qquad y(0) = y(1) \tag{1}$$

и

$$y'' - \lambda p(x)y, \qquad y(0) + ay(1) = 0, \qquad y' + ßay'(1) = 0 (a \neq 0), \tag{2}$$

где $p(x) = 1$ при $x \in [0, \alpha]$ и p(x) = -1 при $x \in [\alpha, 1]$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2} < \alpha < 1$).

В случае оператора второго порядка на разлагаемую функцию, помимо условий гладкости на основном отрезке, накладывались условия аналитической продолжимости в некоторые треугольники и выполнения в этих треугольниках определенных функциональных соотношений.

В статье автора [2] рассмотрен пучок 2-го порядка с простыми характеристиками:

$$y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y, \tag{3}$$

$$(\alpha_{\nu 1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)) + (\beta_{\nu 1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2, \tag{4}$$

где $p_j \in \mathbb{C}$. Для корней w_1, w_2 этого пучка справедливо $0 < w_1 < w_2$. На коэффициенты $\alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$ наложены условия, при которых рассматриваемый пучок является сильно нерегулярным. Получены достаточные условия сходимости двукратных разложения вектор-функций в биортогональные ряды по корневым элементам этого пучка.

В данном случае представлено рассмотрение сильно нерегулярного квадратичного пучка второго порядка с полураспадающимися условиями. Найдены его спектральные разложения и выведен критерий их сходимости.

Работа состоит из введения, основных определений и краткой истории вопроса, трех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Во введении описывается рассматриваемая задача и её актуальность, содержатся краткие сведения о данной работе.

В первом разделе содержатся сведения для рассмотрения поставленной задачи, вводятся необходимые обозначения.

Во втором разделе приводятся вспомогательные леммы и теоремы на основании которых получен основной результат.

В третьем разделе получены основные формулы разложения и критерии их применения.

В заключении указаны полученные результаты и вывод о достижении поставленных целей.

В приложении приводится код программы, позволяющей автоматизировать нахождение коэффициентов для нахождения функции Грина.

Работа носит реферативный характер и основывается на статьях Рыхлова В.С. [2-4]

Основные определения и краткая история вопроса.В данном разделе приведены определения собственных значений и собственных функций. Кроме того, присутствуют определения присоединенных функций и определения классов пучков обыкновенных дифференциальных операторов.

Основное содержание работы. В первом разделе рассматривается в пространстве $L_2[0, 1]$ квадратичный пучок $L(\lambda)$ дифференциальных операторов 2-го порядка, порожденный дифференциальным выражением:

$$l(y,\lambda) := y^{''} + \lambda p_1 y^{'} + \lambda^2 p_2 y, \tag{5}$$

$$U_j(y,\lambda) := \alpha_{j1} y^{'}(0) + \lambda \alpha_{j0} y(0) + \beta_{j1} y^{'}(1) + \lambda \beta_{j0} y(1) = 0, \quad j = 1,2. \tag{6}$$

где $p_1, p_2, \alpha_{ji}, \beta_{ji} \in \mathbb{C}$.

Множество пучков обыкновенных дифференциальных операторов можно разделить на несколько классов:

1) Пучок (5)–(6) регулярен по Биркгофу, т.е. функция Грина имеет следующую оценку вне с.з:
$|G(x,t,\lambda)| \leq \dfrac{C}{\lambda^{n-1}}$(G.D. Birkhoff (1908), Я.Д. Тамаркин (1917), M.H. Stone (1926)).
2) Пучок (5)–(6) почти регулярен, т.е. функция Грина имеет следующую оценку вне с.з:
$|G(x,t,\lambda)| \leq \dfrac{C}{\lambda^{n-1}}$(M.H. Stone (1926), А.П. Хромов (1962), H.E. Benzinger (1970)).
3) Пучок (5)–(6) слабо нерегулярен, т.е. функция Грина имеет предыдущую оценку по крайней мере на 3-х лучах, исходящих из начала, раствор между соседними из которых $< \pi$ (М.Г. Гасымов и А.М. Магеррамов (1974), А.А. Шкаликов (1983)).
4) Во всех остальных случаях пучок Пучок (5)–(6) является сильно нерегулярным.

Решается задача нахождения условий на вектор-функцию $f = (f_0, f_1)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость этой вектор-функции в биортогональный ряд Фурье по корневым элементам пучка $L(\lambda)$.

Находим корни характеристического уравнения w_1, w_2 и считаем, что они лежат на одном луче, причем $0 < w_1 < w_2$. Подсчитываем характеристический определитель пучка $L(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) \\ U_2(y_1,\lambda) & U_2(y_2,\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} v_{11} + exp^{\lambda w_1} w_{11} & v_{12} + exp^{\lambda w_2} w_{12} \\ v_{21} + exp^{\lambda w_1} w_{21} & v_{22} + exp^{\lambda w_2} w_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 \Delta_0(\lambda)$$

В данной работе рассматривается случай сильно нерегулярного пучка с полураспадающимися условиями, ненулевыми являются слагаемые, в которых присутствуют $e^{\lambda w_1}$ и $e^{\lambda(w_1+w_2)}$ соответственно.

Во втором разделе рассматривается лианеризованная задача после замены $v_0 = y, v_1 = \lambda v_0$. Тогда задачу (5)–(6) можно записать в виде:

$$\begin{cases} v_1 = \lambda v_0, -\frac{1}{p_2} v_0^{''} - \frac{p_1}{p_2} v_1^{'} = \lambda v_1, \\ U_j(v) := \alpha_{j1} v_0^{'}(0) + \alpha_{j0} v_1(0) + \beta_{j1} v_0^{'}(1) + \beta_{j0} v_1(1) = 0, \quad j = 1, 2, \end{cases} \tag{5}$$

где $v = (v_0, v_1)^T$.
В матрично-векторной форме задачу (5) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2}\frac{d}{dx} \end{pmatrix} v = \lambda v, \tag{6}$$

$$U_j(v) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

или

$$\widehat{L} v = \lambda v.$$

где уже есть линейный оператор $\widetilde{L}$, действующий в пространстве вектор-функций, определяется следующим образом:

$$\widehat{L} v := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2}\frac{d}{dx} \end{pmatrix} v$$

и действует на множестве $D_{\widetilde{L}} = \{v = (v_0, v_1)^T | v_0 \in W_1^2[0,1], v_1 \in W_1^1[0,1], U_j(v) = 0, \quad j = 1, 2\}$
Обозначим необходимые далее леммы: Лемма 1 позволяет нам получить вид спектральных разложений $v_0(x, \lambda)$ и $v_1(x, \lambda)$
Лемма 1 *Если* $f_0^{'}, f_1 \in L_1[0,1]$ *и*

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0^{'}(0) = f_0^{'}(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0, \tag{8}$$

то

$$v_0(x,\lambda)=\frac{a_{1\overline{2}}}{\lambda(w_2-w_1)\Delta_0}\times\int\limits_0^1 e^{\lambda(w_1x+w_1(1-t))}f(t,\lambda)dt-$$

$$-\frac{a_{2\overline{2}}}{\lambda(w_2-w_1)\Delta_0}\int\limits_0^1 e^{\lambda(w_1x+w_2(1-t))}f(t,\lambda)dt+\frac{a_{\overline{1}1}}{\lambda(w_2-w_1)\Delta_0}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 e^{\lambda(w_1(1-t)+w_2x)}f(t,\lambda)dt-\frac{a_{\overline{1}2}}{\lambda(w_2-w_1)\Delta_0}\int\limits_0^1 e^{\lambda(w_2x+w_2(1-t))}f(t,\lambda)dt-$$

$$-\frac{1}{\lambda(w_2-w_1)}\int\limits_0^x e^{\lambda w_1(x-t))}f(t,\lambda)dt+\frac{1}{\lambda(w_2-w_1)}\int\limits_0^x e^{\lambda w_2(x-t)}f(t,\lambda)dt \qquad (9)$$

$$v_1=\lambda v_0+f_0 \qquad (10)$$

Лемма 2 позволяет нам получить оценку снизу слагаемых из обеих полуплоскостей.

Лемма 2 *Существует такая положительная константа* C_σ, *что*

$$\forall\lambda\in C_{\sigma_-}:|\Delta_0^-(\lambda)|\geq C_\sigma,\quad \forall\lambda\in C_{\sigma_+}:|\Delta_0^+(\lambda)|\geq C_\sigma \qquad (11)$$

Рассмотрим круговые контуры Γ_ν радиуса r_ν, такие, что $r_\nu\longrightarrow\infty$ при $\nu\longrightarrow\infty$.

Лемма 3 говорит об оценке интегралов от спектральных разложений по введенным ранее замкнутым контурам.

Лемма 3

Если $\gamma(x,t)=\gamma_0+\gamma_1x+\gamma_2t, \gamma_2\neq0$ *и* $\gamma(x,t)\,Re\,\lambda<0\quad\forall\lambda\in\Gamma_\nu^+(\Gamma_{\nu^-})$ *при* $x\in[0,1], t\in[a(x),b(x)]$, *где a(x) и b(x) - заданные линейные функции.* $f\in L_p[0,1], p>1, \chi_p(\nu)=\nu^{\frac{1}{p}}$ *при* $1<p<\infty$ *и* $\chi_\infty(\nu)=\ln\nu$ *при* $p=\infty$, *то*

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu^+}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} e^{\gamma(x,t)\lambda}h(t)dtd\lambda\right|\leq C||h||_p\chi_p(\nu) \qquad (12)$$

Теорема 1 *Если* $f_0^{''}, f_1^{'} \in L_1[0,1], \quad p > 1, \quad a_{12} = a_{1\overline{2}}$ *и выполняются условия (2.5), то*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda)d\lambda = -\frac{e_2p_2}{w_2-w_1}F_1(\frac{x}{\tau}) + \frac{e_1p_2}{w_2-w_1}F_1(\tau x+1-\tau) -$$

$$-\frac{p_2}{w_2-w_1}F_1(x) - \frac{e_2(p_1w_2+p_2)}{w_2(w_2-w_1)}f_0(\frac{x}{\tau}) + \frac{e_2(p_1w_2+p_2)}{w_2(w_2-w_1)}f_0(\tau x+1-\tau) -$$

$$-\frac{e_2(p_1w_2+p_2)}{w_2(w_2-w_1)}f_0(x) + o(1), \quad \nu \longrightarrow \infty \tag{13}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda)d\lambda = \Big(-\frac{e_2p_2}{w_2^2(w_2-w_1)}f_1^{'}(\frac{x}{\tau})dt + \frac{e_1p_2}{w_1^2(w_2-w_1)} \times$$

$$\times f_1^{'}(\tau x+1-\tau)dt - \frac{p_2}{w_2^2(w_2-w_1)}f_1^{'}(x)\Big) + \Big(-\frac{e_2(p_2+w_2p_1)}{w_2^2(w_2-w_1)}f_0^{'}(\frac{x}{\tau})dt +$$

$$+\frac{e_1(p_2+w_2p_1)}{w_1^2(w_2-w_1)}f_0^{'}(\tau x+1-\tau)dt - \frac{p_2+w_2p_1}{w_2^2(w_2-w_1)}f_0^{'}(x)\Big) + o(1), \quad \nu \longrightarrow \infty \tag{14}$$

При доказательстве теоремы одной из главных идей являлась идея подсчета интеграла на правой полуплоскости как разность между интегралом по всей плоскости и интегралом по левой полуплоскости.

В третьем разделе сформулирован критерий сходимости спектральных разложений.

Для того, чтобы выполнялось:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda)d\lambda = f_0(x) + o(1), \nu \longrightarrow \infty$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda)d\lambda = f_1(x) + o(1), \nu \longrightarrow \infty$$

необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in [0,1]$ выполнялось условие:

$$\Big(\frac{e_2w_2}{(w_2-w_1)}f_0(\frac{x}{\tau})dt - \frac{e_1w_1}{(w_2-w_1)}f_0(\tau x+1-\tau)dt + \frac{w_1}{(w_2-w_1)}f_0(x)\Big)+$$
$$\Big(-\frac{e_2p_2}{(w_2-w_1)}F_1(\frac{x}{\tau})dt + \frac{e_1p_2}{(w_2-w_1)}F_1(\tau x+1-\tau)dt - \frac{p_2}{(w_2-w_1)}F_1(x)\Big)$$

$$\Big(-\frac{e_2w_1}{(w_2-w_1)}f_1(\frac{x}{\tau})dt - \frac{e_1w_2}{(w_2-w_1)}f_1(\tau x+1-\tau)dt + \frac{w_2}{(w_2-w_1)}f_1(x)\Big)+$$
$$\Big(\frac{e_2}{(w_2-w_1)}f_0'(\frac{x}{\tau})dt - \frac{e_1}{(w_2-w_1)}f_0'(\tau x+1-\tau)dt + \frac{1}{(w_2-w_1)}f_0'(x)\Big),$$

где обозначено $F(x) = \int\limits_0^1 f(x)dx$ Далее с помощью преобразований получается упростить систему:

$$\big(e_2w_1f_0'(\frac{x}{\tau}) - e_1w_2f_0'(\tau x+1-\tau) - w_1f_0'(x)\big)+\big(-e_2w_1^2f_1(\frac{x}{\tau})+$$
$$+ e_1w_2^2f_1(\tau x+1-\tau) - w_1w_2f_1(x)\big)= 0 \quad (15)$$

$$\big(e_2f_0'(\frac{x}{\tau}) - e_1f_0'(\tau x+1-\tau) + f_0'(x)\big)+\big(-e_2w_1^2f_1(\frac{x}{\tau})+$$
$$+ e_1w_2^2f_1(\tau x+1-\tau) - w_2f_1(x)\big)= 0 \quad (16)$$

В этой системе фигурируют только $f_1(x)$ и $f_0'(x)$ Можем заметить, что для случая $e_2 = 0$, то есть $f_0'(x) = w_2f_1(x) \quad \forall x \in [0,1]$ система выполняется автоматически.

В заключении данной работы для квадратичного пучка обыкновенных дифференциальных операторов с полураспадающимися условиями был получен как результат критерий сходимости спектральных разложений в общем виде в качестве системы уравнений. Также были получены упрощенные виды данной системы в случаях,чаще встречающихся на практике, т.е. в случаях, когда не все коэффициенты спектрального разложения ненулевые. Данные примеры были использованы для написания и отлаживания программного кода, который позволяет по заданным условия исходного пучка получить условия сходимости его спектральных разложений.

В приложении приводится программа, реализованная на языке Python. В зависимости от введенных параметров $p_1, p_2, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \beta 10, \beta 11, \beta 20, \beta 21$ выводит в консоль посчитанные корни характеристического уравнения, характеристический определитель, выводит вид формул критерия сходимости,т.е. зависимость $f_0'(x)$ от $f_1(x)$.

Библиографический список 1) Хромов А.П., Гуревич А.П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Матем. заметки. 1994. Т.56, вып.1 с.3 - 15

2) Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Сарат. ун-та . Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т.13, вып.1, ч.1 с.21-26

3)Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям одного пучка дифференциальных операторов второго порядка // Математика. Механика: Сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. - 2011. - Вып. 13. - С. 89-92.

4) Рыхлов В.С. Разложение по корневым элементам нерегулярного дифференциального пучка третьего порядка с кратными характеристиками // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 2016. – Вып. 18. – С. 66-70.

5) Рыхлов В.С. Разложение по корневым функциям сильно нерегулярного пучка дифференциальных операторов второго порядка с кратными характеристиками// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Том 16, Вып. 2.– С. 165–174. DOI: 0.18500/ 1816-9791-2016-16-2-165-174