МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на конечном интервале с симметричным потенциалом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Крыжней Татьяны Григорьевны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ С. А. Бутерин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор ______________ В. А. Юрко

Саратов 2019

Введение. Предметом изучения является обратная задача спектрального анализа для дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейной зависимостью от спектрального параметра на конечном интервале. Такие уравнения часто встречаются в математике, а также в её приложениях в естествознании и технике. В данной работе исследуется обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля.

В отличие от прямых задач спектрального анализа, где известным предполагается дифференциальный оператор, и требуется установить свойства собственных значений и собственных функций данного оператора, обратная задача спектрального анализа заключается в определении операторов по некоторым их спектральным характеристикам. Подобные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики и имеют много приложений в механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и технических наук. Интерес к данной тематике постоянно возрастает благодаря появлению все новых приложений и в настоящее время теория обратных задач интенсивно развивается во всем мире.

Наиболее полные результаты по обратным задачам получены для оператора Штурма-Лиувилля. Первым задачи такого рода рассмотрел Амбарцумян, который показал, что если собственные значения краевой задачи Штурма-Лиувилля с вещественным потенциалом и краевыми условиями Неймана совпадают с квадратами целых чисел, то потенциал почти всюду обращается в нуль. Однако, вообще говоря, задание одного лишь спектра не определяет оператор однозначно. Например, В. А. Марченко показал, что потенциал оператора Штурма-Лиувилля однозначно определяется заданием его спектральной функции, которая, в свою очередь, эквивалентна заданию спектра и весовых чисел. Борг предложил иную постановку обратной задачи: восстановить дифференциальный оператор по двум спектрам краевых задач с общим дифференциальным уравнением и одним общим краевым условием.

Обратные задачи для дифференциальных пучков с нелинейной зависимостью от спектрального параметра изучены меньше. В частности, отсутствуют результаты по обратной задаче для дифференциальных пучков с симметричными коэффициентами. Для доказательства такой задачи теоремы единственности в случае оператора Штурма-Лиувилля существенную роль играет тот факт, что спектр является простым и собственные значения двух краевых задач с одним общим краевым условием обладают свойством перемежаемости. Поэтому в данной работе для пучка требуется дополнительное условие, гарантирующее перемежаемость собственных значений, которое упрощает доказательство.

Исходя из вышесказанного, формулируется следующая цель работы - доказать теорему единственности восстановления дифференциального уравнения по спектру для случая симметричных коэффициентов пучка, а также привести программную реализацию одного из численных методов решения обратной спектральной задачи, а именно, метода основанного на использовании конечно-разностной дискретизации краевой задачи Штурма-Лиувилля.

Работу можно разделить на несколько частей.

В первой части работы приводятся некоторые вспомогательные утверждения с доказательствами, вводятся спектральные характеристики, описываются свойства собственных функций, а также приводится теорема единственности восстановления коэффициентов пучка по спектральным данным.

Во второй части работы, опираясь на факты, приведенные в первой части, доказывается теорема единственности восстановления дифференциального уравнения по одному лишь спектру для случая симметричных коэффициентов пучка. При этом предполагается,коэффициенты пучка удовлетворяют дополнительному условию, гарантирующему простоту спектра.

В третьей части реализован один из численных методов решения обратной спектральной задачи. Для простоты,рассматривается случай оператора Штурма-Лиувилля. На данный момент существует несколько численных методов решения обратных спектральных задач. Однако с вычислительной точки зрения эти методы являются не достаточно эффективными и их применение сталкивается с трудностями при их численной реализации. В данной работе приведен подход для численного решения обратных спектральных задач, основанный на использовании конечно-разностной дискретизации краевой задачи Штурма-Лиувилля.

В четвертой части работы строится программная реализация метода, приведенного в третьей части, на языке Java, а также описывается алгоритм работы программы.

Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырех теоретических глав и одной практической.

Первая глава «Спектральные характеристики. Свойства собственных функций» содержит введение в теорию обратных задач для пучка. В данной главе исследуется краевая задача, а также свойства собственных функций и спектральные характеристики. Кроме того, приведено доказательство теоремы о том, что нули характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи L.

Приведен Пример 1, при условиях: $q_1(x) = 0$, $q_0(x) = 0$, $h = 0$, $H = 0$ и найдены решения краевой задачи, характеристическая функция и собственные значения.

Сформулировано несколько основных лемм, а именно, в Лемме 1 показана справедливость соотношения между производной характеристической функции и весовыми числами. Приведено доказательство Леммы 2 об асимптотике решений $C(x,\rho), C'(x,\rho), S(x,\rho), S'(x,\rho)$ задачи L. Далее, опираясь на доказанную Лемму 2, доказана асимптотика следующих решений задачи L: $\psi(x,\rho), \psi'(x,\rho), \varphi(x,\rho), \varphi'(x,\rho)$. Доказательство приведено в Лемме 3. В Лемме 4 доказана асимптотическая формула для собственных значений задачи L. А также доказана Лемма 5, а именно, что характеристическая функция $\Delta(\rho)$ однозначно определяется своими нулями. Более того, приведено разложение характеристической функции в бесконечное произведение.

Во второй главе «Функция Вейля. Теорема единственности» введено понятие функции Вейля, а также решения Вейля. Доказана Теорема 2, о виде функции Вейля.

Для функции Вейля также вводится понятие спектральных данных пучка L. Спектральные данные вводятся таким образом, что они обобщают те, что были использованы в, а также классические спектральные данные для оператора Штурма-Лиувилля.

Исследуются следующие обратные задачи:

Задача 1. По заданной функции Вейля найти коэффициенты пучка L.

Задача 2. По двум спектрам найти коэффициенты пучка L.

Задача 3. По спектральным данным найти коэффициенты пучка L.

Установлено, что задачи 1-3 эквивалентны, так как задание функции Вейля равносильно заданию спектральных данных, а также двух спектров. Далее доказана единственность решения обратной Задачи 1, а именно, что задание функции Вейля однозначно определяет оператор.

Из приведенной теоремы выведено два следствия.

Следствие 1. Задание двух спектров однозначно определяет коэффициенты пучка L.

Следствие 2. Задание спектральных данных однозначно определяет коэффициенты пучка L.

Отмечено, что задание функции Вейля равносильно заданию спектральных данных. С другой стороны, нули и полюса функции Вейля совпадают со спектрами краевых задач L и L^0 соответственно. Поэтому задание функции Вейля равносильно заданию двух спектров. Таким образом, обратные задачи восстановления по спектральным данным и по двум спектрам являются частными случаями обратной задачи.

В подразделе **«Основное уравнение. Решение обратной задачи»** приведено основное уравнение обратной задачи. Также, методом, изложенным в [7], доказана единственность решения основного уравнения.

В Алгоритме 1 описана процедура решения обратной задачи.

В третьей главе «Решение обратной задачи в случае симметричных коэффициентов пучка» доказана теорема единственности восстановления дифференциального уравнения по спектру для случая симметричных коэффициентов пучка.

Отмечено, что даже когда обратная задача имеет простой спектр, то ничего неизвестно о перемежаемоести собственных значений. Однако, есть условия, при которых собственные значения двух краевых задач с одним общим краевым условием обладают свойством перемежаемости. Они позволяют использовать факт перемежаемости собственных значений, что существенно упрощает доказательство теоремы.

В четвертой главе «Конечно-разностная дискретизации краевой задачи Штурма-Лиувилля, как численный метод решения обратной спектральной задачи» приведен подход для численного решения обратных спектральных задач.

Для простоты рассматривается обратная задача с коэффициентом для случая $q_1(x) = 0$. Другими словами, рассматривается случай оператора Штурма-Лиувилля.

В шестой главе «Конечно-разностная дискретизации краевой задачи Штурма-Лиувилля, программная реализация» приведена программа на языке Java.

Структура программы делиться на две части:

1. реализация функции модифицированного метода Ньютона,
2. подсчет собственных значений СЛАУ.

Также в данной части работы приведены математическое описание алгоритма и схема реализации. Приведена таблица с результатами восстановления потенциала с помощью описанного метода.

Заключение. В данной работе была изучена обратная задача спектрального анализа для дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейной зависимостью от спектрального параметра на конечном интервале.

Цель работы - доказать теорему единственности восстановления дифференциального уравнения по спектру для случая симметричных коэффициентов пучка и привести программную реализацию одного из численных методов решения обратной спектральной задачи, а именно, метода основанного на использовании конечно-разностной дискретизации краевой задачи Штурма-Лиувилля.

На сегодняшний день не известны работы, в которых бы исследовалась единственность восстановления дифференциальных пучков на конечном интервале в случае симметричных коэффициентов. При рассмотрении аналогичного случая для оператора Штурма-Лиувилля, можно опираться на доказанный факт перемежаемости собственных значений. В работе показано, что при определенных условиях, накладываемых на коэффициенты пучка, граничная задача, как и в случае оператора Штурма-Лиувилля, имеет перемежающий спектр и доказана теорема единственности восстановления дифференциального уравнения по спектру для случая симметричных коэффициентов пучка

Исходя из поставленной цели была определена следующая структура работы.

В первой части работы были рассмотрены вспомогательные утверждения с доказательствами, спектральные характеристики, описаны свойства собственных функций, а также приведена теорема единственности восстановления дифференциального уравнения по спектральным данным. Работа, проделанная в первой части, послужила основой для доказательства основной теоремы.

Во второй части приведено доказательство теоремы единственности восстановления дифференциального уравнения по спектру для случая симметричных коэффициентов пучка.

В третьей части приведен один из численных методов для решения обратной спектральной задачи. Для простоты изложения был рассмотрен случай оператора Штурма-Лиувилля. В данной работе приведен подход для численного решения обратных спектральных задач, основанный на использовании конечно-разностной дискретизации краевой задачи Штурма-Лиувилля. На основе описанного алгоритма приведена программная реализация данного метода на языке Java и описан алгоритм программы.