МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

"Решение интегральных уравнений Вольтерра I рода"

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Бунчуковой Анастасии Александровны

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Г.В.Хромова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В.А.Юрко

Саратов 2019

Введение. Цель работы заключается в исследовании методов приближенного решения интегрального уравнения Вольтерра I рода в ситуации, когда правая часть уравнения задана приближенно.

Интегральные уравнения Вольтерра I рода относятся к некорректно поставленным задачам. С появлением компьютеров интерес к таким задачам стал стремительно расти, и к настоящему времени некорректные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую практически во все сферы математики, включая алгебру, геометрию, дифференциальные уравнения, математическую физику, функциональный анализ, вычислительную математику и т.д.

Также теория некорректно поставленных задач широко применяется для решения практических задач в областях науки таких как:

– физика (квантовая механика, акустика, электродинамика)

– геофизика (сейсморазведка, электроразведка, зондирование)

– медицина (рентгеновская томография, ЯМР - томография, УЗИ)

– экология (диагностика состояния воздуха, воды)

– экономика (теория оптимального управления, финансовая математика)

В частности интегральные уравнения Вольтерра I рода также являются востребованными в прикладных задачах. Но при решении этих задач исходные данные всегда заданы приближенно, и решение по отношению к таким данным ведет себя неустойчиво. Поэтому для решения некорректно поставленных задач требуется использование специальных методов - методов регуляризации.

Основное содержание работы. В основной части работы приведены понятия корректно и некорректно поставленных задач. Рассмотрены методы для решения некорректно поставленных задач: метод Денисова, метод регуляризации Тихонова и метод Лаврентьева. Также рассмотрена теорема сходимости и показано, что метод Лаврентьева может применяться не только для положительных самосопряженных операторов. Далее для конкретного интегрального уравнения на языке MATLAB написан численный алгоритм, показывающий сходимость приближенного решения к точному решению.

Корректно и некорректно поставленные задачи. В качестве основного объекта исследований будем рассматривать операторное уравнение вида:

$$A\varphi = f, \tag{1}$$

где A – линейный оператор, действующий из нормированного пространства Φ в нормированное пространство F.

Французским математиком Жаком Адамаром были сформулированы следующие условия корректности постановки математических задач, которые рассмотрим на примере операторного уравнения (1).

Задача решения операторного уравнения называется корректно поставленной (по Адамару), если выполнены следующие три условия:

1) решение существует $\forall f \in F$;

2) решение единственно;

3) если $f_n \to f,\ A\varphi_n = f_n,\ A\varphi = f$, то $f_n \to f$.

Условие 2) обеспечивается тогда и только тогда, когда оператор A является взаимно однозначным.

Условия 1) и 2) означают, что существует обратной оператор A^{-1}, причем его область определения $D(A^{-1})$ (или область значений оператора $R(A)$) совпадает с F. В этом случае говорят, что оператор A есть биекция Φ на F.

Условие 3) означает, что обратный оператор является непрерывным, т.е "малым" изменениям правой части f соответствуют "малые" изменения решения φ. Более того, Адамар считал, что только корректные задачи должны рассматриваться при решении прикладных задач. Однако хорошо известны примеры некорректно поставленных задач, к рассмотрению и численному решению которых приходится прибегать при рассмотрении многочисленных прикладных задач. Также нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство Φ. Выбор пространства решений (в том числе и нормы в нем) обычно определяется требованиями прикладной задачи.

Некорректно поставленная задача – это задача, не обладающая каким-либо из условий корректно поставленной задачи.

Таким образом задача является некорректно поставленной, если

1) решение задачи не существует

2) либо решение задачи существует, но не единственно

3) либо решение задачи не зависит от данных задачи. Т.е. обратный оператор не является непрерывным, "малым" изменениям правой части f не соответствуют "малые" изменения φ.

Метод Денисова. В качестве некорректно поставленной задачи будем рассматривать интегральное уравнение Вольтерра I рода:

$$\int_0^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), x \in [0,a], \qquad (2)$$

Теорема 1 (Денисова). Если ядро уравнения (2) $K(x,s)$ таково, что $K(x,x) \equiv 1$ и $K_x^i(x,s)$, $i = 0,1,2$, непрерывны, а точное решение $\varphi(x) \in C^1[0,a]$, причем известно, что $\varphi(0) = 0$, то при малых h

$$||\varphi_{h\delta}(x) - \varphi(x)||_C \leq k(h + \delta/h), \quad k = const,$$

где $\varphi_{h\delta}(x)$ – решение уравнения

$$h\varphi_{h\delta}(x) + \int_0^x K(x,s)\varphi_{h\delta}(s)ds = y_\delta(x), \ 0 < h \leq h_0$$

При $\delta \to 0$, выбирая $h(\delta) \to 0$ так, что $\frac{\delta}{h(\delta)} \to 0$, получим

$$||\varphi_{h\delta} - \varphi(x)||_C \to 0.$$

Метод регуляризации Тихонова. Метод регуляризации Тихонова используется для решений интегральных уравнений Фредгольма I рода и является едва ли не самым популярным при решении задач с приближенно заданной информацией. Интегральное уравнение Вольтерра I рода (2) может рассматриваться как частный случай уравнения Фредгольма I рода.

Итак, рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I рода:

$$A\varphi = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \tag{3}$$

где $x \in [a,b]$.

Ядро $K(x,s)$ будем считать непрерывным, решение φ – кусочно-гладкой функцией, а правую часть $f(x)$ заданной ее δ-приближением в пространстве $L_2[a,b] : ||f_\delta - f||_{L_2} \le \delta$.

Требуется по f_δ найти приближенное решение уравнения (3) в равномерной метрике.

Центральной в этой схеме является конструкция сглаживающего функционала (часто его называют функционалом Тихонова) при каждом фиксированном значении параметра $\alpha > 0$, который носит название параметра регуляризации:

$$M^\alpha[\varphi,f] = N[\varphi,f] + \alpha\Omega[\varphi],\ \alpha > 0,$$

где

$$N[\varphi,f] = ||A\varphi - f||^2_{L_2} = \int_a^b (A\varphi - f)^2 ds,$$

$$\Omega[\varphi] = \int_a^b [\varphi'^2(s) + \varphi^2(s)]ds = ||\varphi||_{W_2^1},$$

где $M^\alpha[\varphi,f]$ называется сглаживающим, $\Omega[\varphi]$ – регуляризирующим функционалом.

Классическая постановка метода Лаврентьева. М. А. Лаврентьевым был предложен метод замены уравнения (1) другим "близким" ему уравнением, зависящим от положительного оператора α.

В уравнении (1) A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, обратный оператор A^{-1} существует, но не ограничен. A – самосопряженный, положительный.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\varphi_\delta^\alpha + A\varphi_\delta^\alpha = f_\delta, \tag{4}$$

где α – некоторый положительный параметр. Покажем, что $\varphi_\delta^\alpha \to \bar{\varphi}$ при $\delta \to 0$ и некотором согласовании α с δ.

Обозначим

$$R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}.$$

Тогда

$$\varphi_\delta^\alpha = R_\alpha f_\delta.$$

Рассмотрим соотношение

$$||\varphi_\delta^\alpha - \varphi||.$$

Очевидно:

$$||\varphi_\delta^\alpha - \varphi|| \le ||\varphi_\delta^\alpha - \varphi^\alpha|| + ||\varphi^\alpha - \varphi||,$$

где

$$\varphi^\alpha = R_\alpha f.$$

Далее

$$||\varphi_\delta^\alpha - u^\alpha|| = ||R_\alpha(f_\delta - f)|| \le ||R_\alpha||\delta,$$

$$||\varphi^\alpha - \varphi|| = ||R_\alpha A\varphi - \varphi||,$$

откуда

$$||\varphi_\delta^\alpha - \varphi|| \le ||R_\alpha||\delta + ||R_\alpha A\varphi - \varphi||.$$

Очевидно, что оператор R_α это резольвента оператора A, соответствующая точке $\lambda = -\alpha$, т.е $R_\alpha = R_{-\alpha}(A)$.

Так как A – положительный оператор, то его спектр лежит на положительной части вещественной оси. Поэтому точка $\lambda = -\alpha$ является регулярной точкой оператора A.

Далее, R_α есть функция оператора A, соответствующая функции
$\varphi(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$,

т.е $R_\alpha = \int_0^{M+\varepsilon} (\alpha + \lambda)^{-1} dE_\lambda$.

Из свойства функции оператора имеем

$$||R_\alpha|| \leq \sup_{\lambda \in spA} (\alpha + \lambda)^{-1} = \alpha^{-1}.$$

Поскольку супремум достигается в точке $\lambda = 0$, которая является точкой непрерывного спектра оператора A (это следует из того что $R_0(A) = A^{-1}$), то $||R_\alpha|| = \alpha^{-1}$. Отсюда

$$||\varphi_\delta^\alpha - \varphi^\alpha|| \leq \delta\alpha^{-1}.$$

Оператор $R_\alpha A$ есть функция оператора A, соответствующая функции

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\alpha + \lambda)^{-1}.$$

По следствию из спектральной теоремы, перенесенному на функции оператора

$$R_\alpha A\varphi = \int_0^{M+\varepsilon} \lambda(\alpha + \lambda)^{-1} dE_\lambda \varphi.$$

По следствию из спектральной теоремы, перенесенному на функции оператора, имеем:

$$||\varphi^\alpha - \varphi|| = \alpha^2 \int_0^{M+\varepsilon} (\alpha + \lambda)^{-2} d||E_\lambda \varphi||^2.$$

Возьмем произвольное малое $\varepsilon_1 > 0$ и разобьем интеграл на два:

$$\alpha^2\int_0^{M+\varepsilon}(\alpha+\lambda)^{-2}d||E_{\lambda\varphi}||^2=\alpha^2\int_0^{\varepsilon_1}(\alpha+\lambda)^{-2}d||E_\lambda\varphi||^2+$$

$$+\alpha^2\int_{\varepsilon_1}^{M+\varepsilon}(\alpha+\lambda)^{-2}d||E_\lambda\varphi||^2$$

$$\alpha^2\int_0^{\varepsilon_1}(\alpha+\lambda)^{-2}\alpha||E_\lambda\varphi||^2\leq\int_0^{\varepsilon_1}d||E_\lambda\varphi||^2=$$

$$=||E_{\varepsilon_1}\varphi||^2-||E_0\varphi||^2=||E_{\varepsilon_1}\varphi||^2$$

по свойству спектральной функции.

Пусть $\varepsilon_1\to 0$. По свойству спектральной функции $E_{\varepsilon_1}\to E_0=0$.

Отсюда следует, что первый интеграл стремится к 0 при $\varepsilon_1\to 0$.

$$\alpha^2\int_{\varepsilon_1}^{M+\varepsilon}(\alpha+\lambda)^{-2}d||E_\lambda\varphi||^2\leq\frac{\alpha^2}{(\varepsilon_1+\alpha)^2}||\varphi||^2.$$

Очевидно, что при фиксированном ε_1 и $\alpha\to 0$ правая часть стремится к 0. В целом уклонение $||\varphi^\alpha-\varphi||\to 0$ при $\alpha\to 0$.

Если мы выберем согласование параметра α с погрешностью δ $\alpha=\alpha(\delta)$ так, чтобы

1) $\alpha(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$;

2) $\delta\alpha^{-1}(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, то

$||\varphi_\delta^{\alpha(\delta)}-\varphi||\to 0$ при $\delta\to 0$, т.е решение уравнения (4) может служить приближенным решением уравнения $A\varphi=f$.

О сходимости метода Лаврентьева. Для произвольного линейного ограниченного оператора в гильбертовом пространстве область сходимости метода определяется соотношением

$$||R_\alpha A\varphi-\varphi||\to 0,\ \alpha\to 0, \tag{5}$$

Теорема 2 (О необходимом и достаточном условии сходимости). Для выполнения сходимости (5) необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых α выполнялись условия

$$||\alpha R_\alpha Az|| \rightarrow$$

при

$$\alpha \rightarrow 0$$

если $\varphi \in M(A)$ и $\varphi = Az$ а также

$$||R_\alpha A|| \leq K,$$

где константа K не зависит от α, - для $\varphi \in \overline{M(A)}$. Если $\varphi \notin \overline{M(A)}$, то условие (5) не выполняется.

Описание численного алгоритма. Рассмотрим интегральное уравнение:

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1 \varphi(s)ds = \frac{x^2}{2\alpha}.$$

Таким образом ядро задано: $K(x,s) = 1$, правая часть также задана и равна $\frac{x^2}{2}$, $\varphi(0) = 0$, точное решение $\varphi(x) = x$. Покажем, что при уменьшении параметра α, т.е когда $\alpha \rightarrow 0$ приближенное решение $\varphi(s) \rightarrow \varphi(x)$.

Алгоритм написан на языке MATLAB.

MATLAB – это высокоуровневый язык и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов.

Входные данные: K – ядро уравнения; f – заданная правая часть; a – начало отрезка интегрирования, в нашем случае $a = 0$; $b = 1$ – конец отрезка интегрирования, h – шаг сетки.

Результат – вектор y приближений к решению в узлах сетки.

Во второй части программы вызываются данная функция и встроенные функции MATLAB для построения системы координат и графиков.

Рассмотрим 2 случая с разными параметрами α.
Возьмем $\alpha = 0.5, \alpha = 0.045$.

Получившиеся результаты представлены в виде графиков
на Рисунках 1-2. Приближенное решение отображено с помощью кружков. Заметно, что при стремлении параметра α к 0, приближенное решение сходится к точному.

```
function [ y ] = func(K,f,a,b,h)
format long
x=a:h:b
y(1)=f(x(1));
for i=2:1:fix((b-a)/h+1)
s=0;
if i>2
for j=2:1:(i-1)
s=K(x(i),x(j))*y(j)+s;
end
end
y(i)=((1-h/2*K(x(i),x(i)))^(-1))*((f(x(i))+...
(h/2)*K(x(i),x(1))*y(1)+h*s));
end
```

```
close all
clear all
clc
format short;
a=0;
b=1;
alpha=0.08;
K=@(x,s)-(x*0 + s*0 + 1)/alpha;
```

```
f=@(x)(x*x)/(2*alpha);
y_exact=@(x) x;
h=0.05;
x = a:h:b;
n=size(x,2);
y1 = zeros(1,n);
for j=1:n
y1(j)=y_exact(x(j));
end;
plot(x,y1);
hold on;
y_approx=func(K,f,a,b,h)
y2=transpose(y_approx);
plot(x,y2,'or');
```

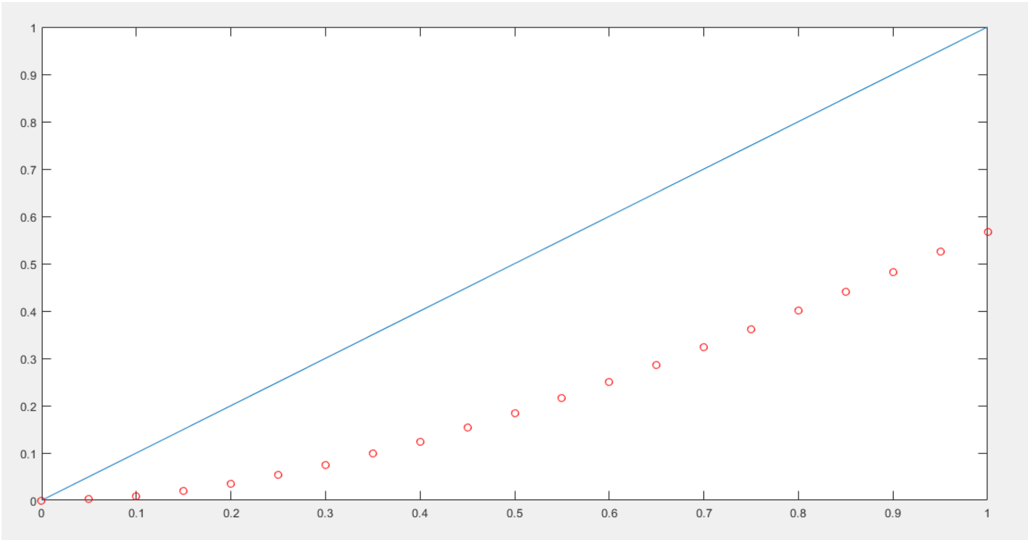

Рисунок 1 - alpha = 0.5.

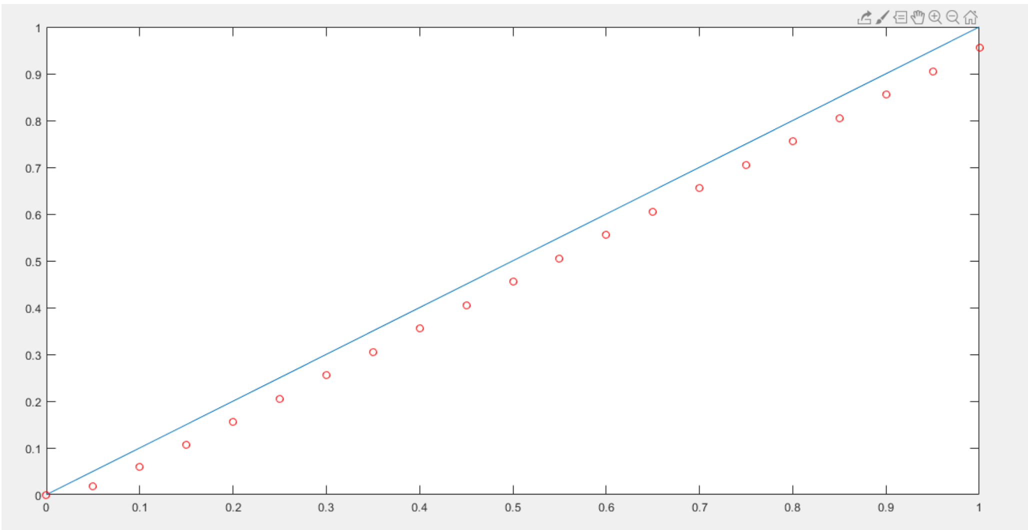

Рисунок 2 - alpha = 0.045.

Заключение. В магистерской работе были изучены методы приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра I рода в случае, когда правая часть уравнения задана приближенно.

В основной части работы были рассмотрены основные методы для решения уравнения Вольтерра I рода, такие как метод Денисова, метод регуляризации Тихонова, и также было уделено особое внимание методу Лаврентьева. Были изучены классическая постановка и необходимые и достаточные условия сходимости метода Лаврентьева для произвольных линейных ограниченных операторов.

По изученному материалу на модельной задаче был составлен математический эксперимент.