МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической физики и вычислительной математики

# Суммирование рядов Фурье с приближённо заданными исходными данными

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Варнакова Романа Александровича

Научный руководитель
д.ф.-м.н, профессор Г.В.Хромова
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н., профессор В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2019

**Введение.** Сформулированы цель и задачи магистерской работы. С развитием прикладных дисциплин и наукоёмких производств возникла необходимость как можно более точно численно подсчитывать значения тех или иных процессов. Предположим, что с помощью какого-либо прибора мы измеряем частотные характеристики интересующего нас физического процесса. Из-за несовершенства прибора мы измеряем указанные частотные характеристики с некоторой ошибкой. Естественно возникает проблема: должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при имеющейся точности измерения частотных характеристик извлечь максимальную информацию об изучаемом физическом процессе.

Метод регуляризации Ильина суммирования рядов Фурье с приближенно заданными данными предлагает обработку результатов измерений частотных характеристик (т.е. коэффициентов Фурье), при которой мы получаем информацию об изучаемом физическом явлении (т.е. об искомой функции f(x)) с ошибкой, соответствующей ошибке в результатах измерений частотных характеристик.

Целью данной работой является изучить теоретические основы методов решения поставленной задачи и наиболее детально исследовать метод регуляризации, предложенный академиком В.А.Ильиным.

Задачи работы сводятся к проведению математического эксперимента по исследованию зависимости приближенного решения от величины погрешности исходных данных и от числа слагаемых в частичной сумме ряда и анализ полученных данных.

**Основное содержание работы.**

**Глава «История развития теории рядов Фурье»**. Содержится теория об истории возникновения, развития и совершенствовании рядов Фурье, а также об их практическом применении при исследовании физических процессов и провидении экспериментов.

Математика является одной из немногих наук, которые широко используются на практике. Любой производственно-технологический процесс не обходится без фундаментальных математических закономерностей. Эффективное применение различных инструментов математического аппарата позволяет конструировать устройства и автоматизированные агрегаты, способные выполнять операции с высоким уровнем точности, выполнять сложные расчеты и вычисления при проектировании зданий и сооружений, производить необходимые вычисления при геодезических исследованиях. Подобная тесная связь, приводит к взаимному обогащению, как самой математики, так и прикладных дисциплин. Зачастую, идеи и методы, созданные для решения частных задач, принимают общий характер и требуют строгого обоснования. Те методы, которые выдержали всесторонние проверки и весьма длительные испытания, в последствие становятся математическими теориями. В дальнейшем эти теории используются при решении более широкого круга задач, нежели те, на основе которых они были созданы. Инженерная практика в значительной мере ориентирует и стимулирует развитие математического аппарата.

Именно от того, что элементы математики встречаются на производстве практически на каждом шагу, специалистам важно знать и блестяще ориентироваться в области применения тех или иных инструментов анализа и расчета. Например, инженеру-электротехнику для расчетов периодических несинусоидальных процессов следует иметь четкое представление о таком важном понятии, как ряд Фурье.

Ряды Фурье – это представление произвольно взятой функции с конкретным периодом в виде ряда. В общем виде данное решение называют разложением элемента по ортогональному базису. Разложение функций в ряд Фурье является довольно мощным инструментарием при решении разнообразных задач благодаря свойствам данного преобразования при интегрировании, дифференцировании, а также сдвиге выражения по аргументу и свертке.

Человек, не знакомый с высшей математикой, а также с трудами французского ученого Фурье, скорее всего, не поймет, что это за «ряды» и для чего они нужны. А между тем данное преобразование довольно плотно вошло в нашу жизнь. Им пользуются не только математики, но и физики, химики, медики, астрономы, сейсмологи, океанографы и многие другие. Давайте и мы поближе познакомимся с трудами великого французского ученого, сделавшего открытие, опередившее свое время.

Ряды Фурье являются одним из методов (наряду с анализом и другими) преобразования Фурье. Данный процесс происходит каждый раз, когда человек слышит какой-либо звук. Наше ухо в автоматическом режиме производит преобразование звуковой волны. Колебательные движения элементарных частиц в упругой среде раскладываются в ряды (по спектру) последовательных значений уровня громкости для тонов разной высоты. Далее мозг превращает эти данные в привычные для нас звуки. Все это происходит помимо нашего желания или сознания, само по себе, а вот для того чтобы понять эти процессы, понадобится несколько лет изучать высшую математику [6].

Преобразование Фурье можно проводить аналитическими, числительными и другими методами. Ряды Фурье относятся к числительному способу разложения любых колебательных процессов – от океанских приливов и световых волн до циклов солнечной (и других астрономических объектов) активности. Используя эти математические приемы, можно разбирать функции, представляя любые колебательные процессы в качестве ряда синусоидальных составляющих, которые переходят от минимума к максимуму и обратно. Преобразование Фурье является функцией, описывающей фазу и амплитуду синусоид, соответствующих определенной частоте. Данный процесс можно использовать для решения весьма сложных уравнений, которые описывают динамические процессы, возникающие под действием тепловой, световой или электрической энергии. Также ряды Фурье позволяют выделять постоянные составляющие в сложных колебательных сигналах, благодаря чему стало возможным правильно интерпретировать полученные экспериментальные наблюдения в медицине, химии и астрономии.

Отцом-основателем этой теории является французский математик Жан Батист Жозеф Фурье. Его именем впоследствии и было названо данное преобразование. Изначально ученый применил свой метод для изучения и объяснения механизмов теплопроводности – распространения тепла в твердых телах. Фурье предположил, что изначальное нерегулярное распределение тепловой волны можно разложить на простейшие синусоиды, каждая из которых будет иметь свой температурный минимум и максимум, а также свою фазу. При этом каждая такая компонента будет измеряться от минимума к максимуму и обратно. Математическая функция, которая описывает верхние и нижние пики кривой, а также фазу каждой из гармоник, назвали преобразованием Фурье от выражения распределения температуры. Автор теории свел общую функцию распределения, которая трудно поддается математическому описанию, к весьма удобному в обращении ряду периодических функций косинуса и синуса, в сумме дающих исходное распределение.

Современники ученого - ведущие математики начала девятнадцатого века - не приняли данную теорию. Основным возражением послужило утверждение Фурье о том, что разрывную функцию, описывающую прямую линию или разрывающуюся кривую, можно представить в виде суммы синусоидальных выражений, которые являются непрерывными. В качестве примера можно рассмотреть «ступеньку» Хевисайда: ее значение равно нулю слева от разрыва и единице справа. Данная функция описывает зависимость электрического тока от временной переменной при замыкании цепи. Современники теории на тот момент никогда не сталкивались с подобной ситуацией, когда разрывное выражение описывалось бы комбинацией непрерывных, обычных функций, таких как экспонента, синусоида, линейная или квадратичная.

Ведь если математик был в прав в своих утверждениях, то, суммируя бесконечный тригонометрический ряд Фурье, можно получить точное представление ступенчатого выражения даже в том случае, если оно имеет множество подобных ступеней. В начале девятнадцатого века подобное утверждение казалось абсурдным. Но несмотря на все сомнения, многие математики расширили сферу изучения данного феномена, выведя его за пределы исследований теплопроводности. Однако большинство ученых продолжали мучиться вопросом: "Может ли сумма синусоидального ряда сходиться к точному значению разрывной функции?"

Вопрос о сходимости поднимается всякий раз при необходимости суммирования бесконечных рядов чисел. Для понимания данного феномена рассмотрим классический пример. Сможете ли вы когда-либо достигнуть стены, если каждый последующий шаг будет вдвое меньше предыдущего? Предположим, что вы находитесь в двух метрах от цели, первый же шаг приближает к отметке на половине пути, следующий – к отметке в три четверти, а после пятого вы преодолеете почти 97 процентов пути. Однако сколько бы вы шагов ни сделали, намеченной цели вы не достигните в строгом математическом смысле. Используя числовые расчеты, можно доказать, что в конце концов можно приблизиться на сколь угодно малое заданное расстояние. Данное доказательство является эквивалентным демонстрации того, что суммарное значение одной второй, одной четвертой и т. д. будет стремиться к единице.

Повторно данный вопрос поднялся в конце девятнадцатого века, когда ряды Фурье попробовали применить для предсказания интенсивности отливов и приливов. В это время лордом Кельвином был изобретен прибор, представляющий собой аналоговое вычислительное устройство, которое позволяло морякам военного и торгового флота отслеживать это природное явление. Данный механизм определял наборы фаз и амплитуд по таблице высоты приливов и соответствующих им временных моментов, тщательно замеренных в данной гавани в течение года. Каждый параметр представлял собой синусоидальную компоненту выражения высоты прилива и являлся одной из регулярных составляющих. Результаты измерений вводились в вычислительный прибор лорда Кельвина, синтезирующий кривую, которая предсказывала высоту воды как временную функцию на следующий год. Очень скоро подобные кривые были составлены для всех гаваней мира.

В то время представлялось очевидным, что прибор, предсказывающий приливную волну, с большим количеством элементов счета может вычислить большое количество фаз и амплитуд и так обеспечить более точные предсказания. Тем не менее оказалось, что данная закономерность не соблюдается в тех случаях, когда приливное выражение, которое следует синтезировать, содержало резкий скачок, то есть являлось разрывным. В том случае, если в устройство вводятся данные из таблицы временных моментов, то оно производит вычисления нескольких коэффициентов Фурье. Исходная функция восстанавливается благодаря синусоидальным компонентам (в соответствии с найденными коэффициентами). Расхождение между исходным и восстановленным выражением можно измерять в любой точке. При проведении повторных вычислений и сравнений видно, что значение наибольшей ошибки не уменьшается. Однако они локализируются в области, соответствующей точке разрыва, а в любой иной точке стремятся к нулю. В 1899 году этот результат был теоретически подтвержден Джошуа Уиллардом Гиббсом из Йельского университета.

Анализ Фурье неприменим к выражениям, содержащим бесконечное количество всплесков на определенном интервале. В общем и целом ряды Фурье, если изначальная функция представлена результатом реального физического измерения, всегда сходятся. Вопросы сходимости данного процесса для конкретных классов функций привели к появлению новых разделов в математике, например теории обобщенных функций. Она связана с такими именами, как Л. Шварц, Дж. Микусинский и Дж. Темпл. В рамках данной теории была создана четкая и точная теоретическая основа под такие выражения, как дельта-функция Дирака (она описывает область единой площади, сконцентрированной в бесконечно малой окрестности точки) и «ступень» Хевисайда. Благодаря этой работе ряды Фурье стали применимы для решения уравнений и задач, в которых фигурируют интуитивные понятия: точечный заряд, точечная масса, магнитные диполи, а также сосредоточенная нагрузка на балке.

Ряды Фурье, в соответствии с принципами интерференции, начинаются с разложения сложных форм на более простые. Например, изменение теплового потока объясняется его прохождением сквозь различные препятствия из теплоизолирующего материала неправильной формы или изменением поверхности земли – землетрясением, изменением орбиты небесного тела – влиянием планет. Как правило, подобные уравнения, описывающие простые классические системы, элементарно решаются для каждой отдельной волны. Фурье показал, что простые решения также можно суммировать для получения решения более сложных задач. Выражаясь языком математики, ряды Фурье – это методика представления выражения суммой гармоник – косинусоид и синусоид. Поэтому данный анализ известен также под именем «гармонический анализ».

В самой общей формулировке можно сказать, что ряды Фурье применяются в тех областях, где изучаются колебательные процессы. Поэтому ясно, что сфера их применения очень широка.

**Глава «Сведение задачи суммирования ряда Фурье к задаче восстановления периодических функций».** рассматривается постановка задачи суммирования ряда Фурье и её эквивалентность задаче восстановления непрерывной периодической функции.

Предположим сначала, что функция f(x) удовлетворяет условиям, обеспечивающим равномерную сходимость её тригонометрического ряда Фурье.

$$\tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k coskx + b_k sinkx) \qquad (\text{П}.1)$$

на всём сегменте $[-\pi, \pi]$. Предположим далее, что вместо точного значения тригонометрических коэффициентов Фурье $a_k$ и $b_k$ этой функции нам известны лишь приближенные значения $\tilde{a_k}$ и $\tilde{b_k}$ указанных коэффициентов Фурье. Именно этот случай весьма часто встречается в прикладных задачах.

Будем считать, что ошибки при задании приближенного значения тригонометрических коэффициентов Фурье малы в смысле нормы пространства $l_2$. Это означает, что справедливо неравенство:

$$\frac{(a_0-\tilde{a_0})^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\tilde{a_k})^2+(b_k-\tilde{b_k})^2\leqslant\delta^2, \qquad (\Pi.2)$$

где $\delta$- достаточно малое положительное число, которое мы будем называть погрешностью в задании коэффициентов Фурье.

Естественно возникает важная для приложений задача: по приближенным значениям коэффициентов Фурье $\tilde{a_k}$ и $\tilde{b_k}$ восстановить в данной фиксированной точке x функцию f(x) с ошибкой $\epsilon(\delta)$, стремящиеся к нулю при $\delta\to 0$.

Покажем, что прямым суммированием ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье

$$\frac{\tilde{a_0}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{a_k}coskx+\tilde{b_k}sinkx), \qquad (\Pi.3)$$

вообще говоря, невозможно добиться восстановления функции f(x) в данной точке x ни с какой степенью точности.

Фиксируем произвольно малую погрешность $\delta>0$ и положим C $=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$. Предположим, что погрешности в задании коэффициентов Фурье имеют следующий конкретный вид:

$$\tilde{a_0}-a_0=0, a_k-\tilde{a_k}=b_k-\tilde{b_k}=\frac{\delta}{kC\sqrt{2}} \text{ при k=1,2,...}$$

Для заданных с такими погрешностями коэффициентов Фурье, очевидно, будет справедливо соотношение (2) со знаком точного равенства. Вместе с тем при замене точного ряда Фурье (1) рядом Фурье с приближенно заданными коэффициентами(3) мы совершим ошибку, равную сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{a_k} - a_k coskx + (\tilde{b_k} - b_k)sinkx.$$

В точке x=0 эта ошибка равна сумме ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{a_k} - a_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$$

(сколь бы малой мы не фиксировали погрешность $\delta > 0$).

Таким образом, сколь бы быстро ни сходился точный тригонометрический ряд Фурье (1) к функции f(x) и как бы мала ни была погрешность $\delta$ в соотношении (2), задающем степень отклонения приближенных коэффициентов Фурье (3) невозможно восстановить функцию f(x) в заданной точке сегмента $[-\pi, \pi]$ ни с какой степенью точности.

Фактически мы доказали, что как бы мало ни было число $\delta > 0$, характеризующее уклонение друг от друга в смысле (2) двух совокупностей коэффициентов Фурье $(a_k, \tilde{b_k})$ и $(\tilde{a_k}, \tilde{b_k})$, отвечающие этим двум совокупностям прямые суммы тригонометрических рядов Фурье (1) и (3) могут как угодно сильно отличаться друг от друга.

Такого рода задачи, для которых как угодно малое уклонение в задании исходных данных (в рассмотренном нами случае такими исходными данными является совокупность коэффициентов Фурье) может вызвать как угодно большое уклонение отвечающих этим исходным данным решений (в рассмотренном нами случае под решением понимается прямая сумма тригонометрического ряда Фурье), часто встречаются в математике и в приложениях и называются некорректно поставленными задачами.

Иными словами, рассмотренная нами задача о прямом суммировании тригонометрического ряда Фурье является некорректно поставленной.

Общий метод решения широкого класса некорректно поставленных задач разработан советским математиком А.Н. Тихоновым и называется методом регуляризации.

Здесь мы остановимся на методе регуляризации лишь применительно к рассмотренной нами задаче о суммировании тригонометрического ряда Фурье.

**Глава «Метод В.А. Ильина решения задачи суммирования рядов Фурье».** содержится теория метода регуляризации В.А. Ильина и его применения к решению задачи суммирования ряда Фурье с приближённо заданными коэффициентами.

Теорема А.Н. Тихонова. Пусть функция f(x) принадлежит классу $L^2[-\pi, \pi]$ и непрерывна в данной фиксированной точке x сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогда для каждого $\delta > 0$ и для $\alpha$, имеющего тот же порядок малости, что и $\delta$, сумма ряда (4) с коэффициентами $\tilde{a_k}$ и $\tilde{b_k}$, удовлетворяющими соотношению (2), совпадает в данной фиксированной точке x с f(x) с ошибкой$\epsilon(\delta)$, стремящейся к нулю при $\delta \to 0$

Предложенный В.А. Ильиным метод регуляризации имеет большое естественнонаучное значение.

Предположим, что с помощью какого-либо прибора мы измеряем частотные характеристики интересующего нас физического процесса. Из-за несовершенства прибора мы измеряем указанные частотные характеристики с некоторой ошибкой.

Естественно возникает проблема: должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при имеющейся точности измерения частотных характеристик извлечь максимальную информацию об изучаемом физическом процессе. Метод регуляризации указывает путь к такой математической обработке результатов измерений частотных характеристик (т.е. коэффициентов Фурье), при которой мы получаем информацию об изучаемом физическом явлении (т.е. об искомой функции f(x)) с ошибкой, соответствующей ошибке в результатах измерений частотных характеристик.

**Заключение.** подведён итог цели и задачам работы.

Метод регуляризации В.А. Ильина является мощным аппаратом для получения как можно более точной аппроксимации частных сумм ряда Фурье к исходно заданной модельной функции.

Результатами магистерской работы являются:

- подробное изучение теоретические основы методов решения поставленной задачи и наиболее детально исследовать метод регуляризации, предложенный академиком В.А.Ильиным

- проведение математического эксперимента по исследованию зависимости приближенного решения от величины погрешности исходных данных и от числа слагаемых в частичной сумме ряда и анализ полученных данных.