МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 219 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Федосеева Вадима Вадимовича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент ______________ В. Г. Тимофеев

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор ______________ Д. В. Прохоров

Саратов 2019

Введение. Основной целью выпускной квалификационной работы является изучение свойств обобщённых функций и их интегральных преобразований, разбор основных понятий теории обобщённых функций, а также применение теоремы отсчётов В.А. Котельникова. Анализ обобщенных функций является одной из важных отраслей математики которая имеет огромное применение в практических областях. В частности, очень примечательны его приложения к теории распределения и обработки сигналов. Основным способом выработки решений является преобразование Фурье, которое имеет отличные приложения к обобщенным функциям. Эти две ветви математики очень важны для решения практических задач. Были поставлены следующие задачи:

1. изучение обобщённых функций, как линейных функционалов над пространством "обычных" функций;
2. разбор основных операций над обобщёнными функциями и их преобразований, таких как свёртка и преобразование Фурье;
3. изучение класса функций Пэли-Винера и разбор вопроса применимости к ним теоремы Котельникова;
4. изучение актуальных вопросов дискретизации аналоговых сигналов;
5. написание программного кода для выполнения преобразования Фурье функций и вычисления оптимальной частоты дискретизации.

В разделе 1 выпускной квалификационной работы приводятся основные понятия и теоремы теории обобщённых функций, а также рассматриваются их свойства. Отдельно выделяются описание и свойства дельта-функции Дирака в силу её ключевой роли в теории обработки сигналов. Также в этом разделе приводятся понятия свёртки обобщённых функций.

Далее рассматривается применение преобразования Фурье к обобщённым функциям, как наиболее важного интегрального преобразования. Описывается связь между преобразованиями Фурье основных и обобщённых функций.

В разделе 2 приводится теорема отсчетов В.А.Котельникова и подробно разбирается её доказательство. Вводится понятие периодических обобщённых функций и выделяется пространство функций Пэли-Винера, как наиболее перспективное для дальнейшего рассмотрения в контексте применения теоремы отсчётов. Рассуждения и выводы из данного раздела основываются на исследованиях других авторов, в которых намечаются основные направления исследования функций класса Пэли-Винера.

Также в этом разделе описываются основные методы дискретизации сигналов с применением обобщённых функций. Подчёркивается ключевая роль дельта-функции Дирака и преобразования Фурье в теории обработки сигналов.

В разделе 3 описывается алгоритм программного кода на языке C#, рассчитывающего оптимальную величину частоты дискретизации для быстро убывающих функций из пространства Шварца для их последующего восстановления с наименьшими потерями. Данный программный код представлен в приложении А. Для эффективной работы с языком Java использовались источники, являющиеся наиболее популярными работами по использованию C#. Далее в этом разделе приводится пример подобной функции, а также результат программы, описанной выше, для данной функции.

Основное содержание работы.

Определение 1.1. *Основная функция - это вещественная функция, которая имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, то есть supp φ является ограниченным подмножеством в G*

Совокупность основных функций $\mathscr{D}\left(R^n\right)$ с заданной на ней сходимостью будем называть основным пространством $\mathscr{D}$.

Определение 1.4. *Пространством быстро убывающих функций $\mathscr{S}$ называется множество всех бесконечно дифференцируемых функций, которые стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными любого порядка быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$, то есть для любого x выполняются неравенства*

$$\left|x^k \varphi^{(q)}\left(x\right)\right| \leq C_k, q, \quad k, q = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Определим сходимость в $\mathscr{S}\left(R^n\right)$.

Определение 1.6. *Обобщенной функцией будем называть каждый линейный непрерывный функционал, который определён на основном пространстве Ф. Будем называть обобщенные функции, заданные формулами вида (1.1), регулярными, а все остальные функции — сингулярными.*

Определение 1.7. *Дельта-функцией Дирака называется линейный непрерывный функционал (т. е. обобщенная функция), действующий на основные функции $\varphi(x)$ по правилу:*

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0) \tag{2}$$

Действие дельта-функции согласно этому правилу можно расширить на все функции $\varphi(x)$, определённые и непрерывные в некоторой окрестности нуля (т. к. каждой такой функции можно поставить в соответствие некоторую основную функцию, совпадающую в нуле с исходной функцией). Поскольку результат действия дельта-функции определяется только значением $\varphi(x)$ в нуле, то

$$\int_{a}^{b} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

для любого отрезка $[a, b]$, содержащего точку 0 внутри: $a \leqslant 0 \leqslant b$.

Если же отрезок $[a, b]$ не содержит точку 0, то

$$\int_{a}^{b} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

Отметим, что $\delta(x)$ не является функцией в обычном смысле этого слова, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, dx$ не является интегралом в обычном смысле. Это всего лишь удобные обозначения. Дельта-функция, как и всякая обобщённая функция, является оператором и задаётся исключительно способом её действия на основные функции $\varphi(x)$.

Определение 1.8. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — локально интегрируемые функции на R^n. Свертка этих двух функций определяется соотношением*

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int_{R^n} f(t)\, g(x-t)\, dt \int_{R^n} g(t)\, f(x-t)\, dt \tag{3}$$

Пусть $f(x)$ - абсолютно интегрируемая функция и $g(\omega)$ — ее преобразование Фурье. Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ и ее преобразования Фурье имеет место соотношение

$$(f, \varphi) = \frac{1}{2\pi}(g, \psi) \tag{4}$$

Определение 1.10. *Преобразованием Фурье обобщенной функции $f(x)$ называется обобщенная функция $F[f(x)] = f(\omega)$, определяемая соотношением*

$$(g, \psi) = 2\pi(f, \varphi) \tag{5}$$

Теорема отсчетов была сформулирована и доказана В.А. Котельниковым в 1933 году в его статье "О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи". В упомянутой работе было сформулировано несколько утверждений, но предметом настоящего исследования является следующая теорема:

Теорема 2.1 (Теорема отсчетов). *Любую функцию $F(t)$, состоящую из частот от 0 до f_1 периодов в секунду, можно представить рядом*

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin \omega_1 [t - (k/2f_1)]}{t - (k/2f_1)} \tag{6}$$

где k - целое число; $\omega_1 = 2\pi f_1$; D_k - постоянные, зависящие от $F(t)$

Определение 2.1. *Обобщённая функция $f(x)$ называется периодической с периодом T, $T_j > 0$, если она удовлетворяет следующим условиям:*

$$f(x + T) = f(x)$$

Пространство всех периодических обобщенных функций с периодом T обозначим через $\mathscr{D}_T$

Рассмотрим преобразование Фурье в смысле обобщённых функций, и исследуем функции, чьё преобразование Фурье является обобщённой функцией с компактным носителем. В этом случае функции из расширенного пространства, обозначаемого как PW, характеризуются теоремой Пэли-Винера-Шварца Теорема Пэли-Винера-Шварца устанавливает соответствие между обобщёнными функциями из пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций и "обычными"функциями определённого класса.

Теорема 2.3 (Теорема Пэли-Винера-Шварца). *Для всех $n \in \mathbb{N}$ векторное пространство $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ гладких функций с компактным носителем изоморфно(алгебраически и топологически) посредством преобразования Фурье, пространству целых функций PW на $\mathbb{C}^{n}$, которые удовлетворяют следующей оценке: существует положительное число $B \in \mathbb{R}$, такое, что для каждого целого $N > 0$ существует A, такое, что:*

$$\forall z \in \mathbb{C} : \left(\left|F\left(z\right)\right| \leq A\left(1+\left|z\right|\right)^{-N} e^{B\left|\operatorname{Im} z\right|}\right) \tag{7}$$

В более общем смысле, пространство обобщённых функций с компактным носителем на $\mathbb{N}^{n}$ порядка $N \in \mathbb{N}$ изоморфно (посредством преобразования Фурье для обобщённых функций) множеству целых функций, для которых существуют положительные вещественные числа $B, C \in \mathbb{R}_{+}$ Определим топологию на пространстве PW. Вначале рассмотрим для каждого $n \in \mathbb{N} \cup 0$ пространство целых функций, таких, что

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\left|f\left(z\right)\right| e^{-n\left|\operatorname{Im} z\right|}\left(1+\left|z\right|\right)^{-n}\right) < \infty$$

Каждое PW^{n} - банахово пространство, наделённое нормой $\|\cdot\|_{n}$. Далее, рассмотрим пространства $PW_{n} \subset PW_{n+1}$ для каждого n с непрерывным включением и $PW = \bigcup_{n=0}^{\infty} PW_{n}$.

Расширим теорему отсчетов для случая с обобщёнными функциями.

Лемма 2.3. *Если последовательность $\{f_{k}\}$, $k \in \mathbb{Z}$ сходится в $L^{2}\left[-\pi, \pi\right]$, то она сходится и в $\mathscr{D}'\left(\mathscr{R}\right)$*

Отметим, что выбор интервала $[-\pi, \pi]$ произволен.

Применим лемму 3 для доказательства следующей теоремы:

Теорема 2.4. *Пусть $f \in PW_{\pi}$ тогда*

$$f\left(z\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\right) \frac{\sin \pi\left(z-k\right)}{\pi\left(z-k\right)} \tag{8}$$

причём ряд сходится равномерно в $\mathbb{C}$.

Рассмотрим теорему отсчетов для функций пространства PW, которые являются обратным преобразованием Фурье для некоторой обобщенной функции с компактным носителем на вещественной прямой. Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ — обобщённая функция с носителем $\operatorname{supp} T$, замкнутом, скажем, в открытом интервале $(-\pi, \pi)$. Продолжим эту функцию с периодом 2π

$$T_{per} = T * \Delta_{2\pi}$$

где $\Delta_{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi k}$ - последовательность дельта-функций с периодом 2π. $T_{per} \in \mathscr{S}'$. Эта последовательность может быть разложена в ряд Фурье

$$T_{per} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\omega k}$$

сходящийся в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Более того, коэффициенты ряда $c_k = \frac{1}{2\pi}\left(T, e^{(i\omega k)}\right) = f(k)$ для $f = \mathscr{F}^{-1}(T)$ и $c_k = O(|n|^p)$ для $p \in \mathbb{Z}$. Получим сходимость к T в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Для этого введём следующую функцию:

Определение 2.2. *Единичной функцией будем называть функцию $\theta(z) \in (\mathbb{R})$, для которой справедливо равенство:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(z+k) = 1 \tag{9}$$

для всех z

Лемма 2.4. *Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ с носителем, замкнутым в открытом интервале $(-\pi, \pi)$, $f = \mathscr{F}^{-1}(T) \in PW$ и $\hat{\theta} \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ с $\operatorname{supp}\hat{\theta} \subset (-\pi, \pi)$ и $\hat{\theta} \equiv 1$ на открытом интервале, включающем в себя $\operatorname{supp} T$. Тогда T может быть представлена рядом*

$$T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{-ik\omega}\hat{\theta} \tag{10}$$

сходящимся в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$

Теорема 2.6. *Пусть $f \in PW, T = F(f)$ и $\hat{\theta} \in \mathscr{D}(R)$. Тогда*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, \theta(z-k) \tag{11}$$

с равномерной сходимостью на компактных множествах из $\mathbb{C}$

Под дискретизацией сигнала понимается преобразование функций непрерывных переменных, которой является любой сигнал, в функции дискретных переменных. Исходные непрерывные функции в дальнейшем могут быть восстановлены с заданной точностью по данной функции. Как правило, роль дискретных отсчетов выполняют дискретные значения функций, подвергшиеся квантованию. Квантованием называется преобразование непрерывной величины в величину дискретную, имеющую дискретную шкалу значений из конечного множества разрешенных шкал, которые являются уровнями квантования. В случае нумерованных уровней квантования результатом преобразования будет являться число, которое может быть выражено в любой применимой числовой системе. Простейшим случаем дискретизации является округление мгновенных значений непрерывной величины с определенной разрядностью с равномерным шагом по аргументу.

В пределах исходного интервала преобразование Фурье $X_S\left(f\right)$ дискретной функции $x_S\left(t\right)$ равно, с точностью до постоянного множителя $(1/T_S)$, преобразованию Фурье исходной функции $x\left(t\right)$. Кроме того, преобразованию Фурье периодически повторяется по по оси ω с интервалом f_S Гц. Фильтрующее свойство дельта-функции позволяет легко получить свертку в частотной области последовательности импульсов с другой функцией.

Заключение.В работе были рассмотрены основные понятия теории обобщённых функций. А именно, были описаны основные операции в пространстве обобщённых функций, понятие свёртки и преобразования Фурье обобщённых функций. Также был описан переход к периодическим обобщённым функциям. Во второй части квалификационной работы была рассмотрена теоремы Котельникова, и дано определение периодических обобщённых функций. Также было проведено исследование функций из пространства Пэли-Винера, и показано, что теорема Котельникова также может быть применена к подобным функциям.

В последней части работы был описан алгоритм програмного кода (приложение А) на языка C# для определения оптимальной части преобразования Фурье функции, с помощью которой можно восстановить функцию с наименьшими потерями. Программа основывается на принципах ООП, что позволяет сделать её расширяемой и использовать в дальнейшем для любых функций, удовлетворяющих условиям из раздела 1. Также, в качестве примера, была приведены функции $e^{-|x+\sin x+\cos 4x|^2+|\cos 4x|}$ и $e^{-|x|^2}$, принадлежащие пространству быстро убывающих функций. Для данных примеров были показаны результаты работы программы и приведено сравнение результатов.

Таким образом, задачи выпускной квалификационной были полностью достигнуты. Результаты данной работы могут быть использованы для дальнейшего изучения теории обобщённых функций, и её приложения в области обработки сигналов с помощью теоремы Котельникова.