МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Аффинные системы функций и алгоритмы разложения по ним

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 219 группы
направления (специальности) 01.04.02 прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Иванова Савелия Викторовича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ________________ П.А. Терехин

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент ________________ С.П. Сидоров

Саратов 2019

Введение. В магистерской работе рассмотрены аффинные системы функций или функции на единичном отрезке, порожденные двоичными сжатиями и целочисленными сдвигами одной функции, а также рассмотрено понятие дуальной функции.

Подобные системы функций представляют собой важный специальный класс функциональных систем, удобный для отработки различных методов и подходов к решению общей задачи о представлении функций рядами. В то же время, аффинные системы находят многочисленные применения в различных областях математики: дифференциальные уравнения, вычислительная математика, функциональный анализ, а также в прикладных задачах обработки, хранения и передачи информации, сжатии изображений и теории сигналов.

Целью данной работы является изучение аффинных систем функций, рассмотрение условий сходимости биортогонального ряда по элементам аффинной системы, а также рассмотрение алгоритма вычисления коэффициентов биортогонального ряда и программная реализация подсчета коэффициентов.

В связи с поставленной целью в работе решаются следующие задачи:

1) дать основные определения, в частности, определения аффинной системы функций и дуальной функции
2) сформулировать и доказать основные теоремы, в частности, об образовании аффинной системой базиса Рисса
3) рассмотреть алгоритм нахождения коэффициентов биортогонального ряда
4) разработать программную реализацию подсчета коэффициентов биортогонального ряда

Работа состоит из введения; основной части, она состоит из 6 разделов; заключения; списка использованных источников; приложения.

Основное содержание работы. Рассматриваются аффинные системы функций (системы двоичных сжатий и целочисленных сдвигов функции). Для действительнозначной или комплекснозначной функции $\varphi(t), t \in R$, с носителем $supp\, \varphi \subset [0,1]$ на единичном отрезке и для натурального числа $n = 2^k + j$, где $k = 0,1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j).$$

Кроме того, пусть $\varphi_0 = \chi_{[0,1]}$ − характеристическая функция единичного отрезка. Последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *аффинной системой* или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ. Примером аффинной системы является классическая система Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$, порожденная функцией $\chi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$. Подобно функциям Хаара функции аффинной системы имеют локализованные носители $supp\, \varphi_n = supp\, \varphi_{k,j} \subset [j2^k, (j+1)2^{-k}]$ внутри единичного отрезка. То обстоятельство, что значения функций $\varphi_n(t)$ аффинной системы определяются значениями лишь одной порождающей функции $\varphi(t)$ (так называемое *свойство когерентности* функций системы), делает аффинные системы функций удобным инструментом при решении различных вычислительных задач. При этом произвольность выбора порождающей функции φ позволяет наделять функции аффинной системы дополнительными желаемыми свойствами, такими, как гладкость либо фрактальность, монотонность или выпуклость, наличие различных симметрий графика и т.п. Рассматриваются аффинные системы функций (системы двоичных сжатий и целочисленных сдвигов функции). Аффинные системы функций являются частным случаем неортогональных всплескоподобных систем функций, или, в другой терминологии, полных (в том смысле, что индексы m, n принимают всевозможные целые значения) аффинных систем вида

$$\psi_{m,n}(t) = a^{m/2}\psi(a^m t - nb), \qquad m,n \in \mathrm{Z},$$

где $\psi \in L^2(R)$ и $a > 1, b > 0$.

Определение 1.1. Говорят, что ряд Фурье–Хаара

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \chi_n)\, \chi_n$$

функции $f \in L^2[0,1]$ *абсолютно сходится по пачкам*, если конечна величина

$$\|f\|_* = |(f, \chi_0)| + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |(f, \chi_n)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{L}_*^2 = \mathcal{L}_*^2[0,1]$ снабженное нормой $\|\cdot\|_*$ пространство функций $f \in L^2[0,1]$, которые имеют абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье–Хаара.

Теорема 1.1. *Если функция φ имеет абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье–Хаара, то аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является системой Бесселя.*

Теорема 1.2. *Для того чтобы аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы обе аффинные системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\varphi_n^d\}_{n=0}^{\infty}$ являлись системами Бесселя.*

Теорема 1.3. *Пусть порождающая функция φ и дуальная функция φ^d обе принадлежат классу $\mathcal{L}_*^2$. Тогда аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса.*

Доказательство. По **теореме 1.1** из условия $\varphi \in \mathcal{L}_*^2$ следует бесселевость аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому существует ограниченный линейный оператор $A: L_0^2 \to L_0^2$ такой, что $A_{\chi_n} = \varphi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такой оператор перестановочен с мультисдвиогом $\{V_0, V_1\}$, т.е. $AV_i = V_iA, i = 0, 1$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ имеем

$$AV^\alpha \chi_\beta = AV^\alpha V^\beta \chi = A\chi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta} = V^\alpha V^\beta \varphi = V^\alpha \varphi_\beta = V^\alpha A \chi_\beta,$$

откуда $AV^\alpha f = V^\alpha Af$ для всех $f \in L_0^2$. В частности, $AV_i = V_i A, i = 0, 1$. Для дуальной функции $\varphi^d \in \mathcal{L}_*^2$ аналогично получаем существование ограниченного линейного оператора $A_d: L_0^2 \to L_0^2$ такого, что $A_d \chi_n = \varphi_n^d$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $A_d V_i = V_i A_d, i = 0, 1$. Проверим, что $A_d = A^{-1} -$ обратный оператор. Для этого для функции

$$A_d A_\chi = A_d \varphi = A_d \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} x_\alpha \chi_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} x_\alpha \varphi_\alpha^d$$

найдем ее коэффициенты Фурье-Хаара:

$$A_d A_{\chi_\alpha} = A_d A V^\alpha \chi = V^\alpha A_d A \chi = V^\alpha \chi = \chi_\alpha,$$

откуда $A_d A f = f$ для всех $f \in L_0^2$. Таким образом, $A_d A = I -$ тождественный оператор. Итак, $A_d = A^{-1}$. Так как $A\chi_n = \varphi_n, n \in \mathbb{N}$, то система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ будет базисом Рисса пространства L_0^2. В свою очередь аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ образует базис Рисса пространства $L^2[0,1]$.

Теорема 1.3 дает удобное для проверки достаточное условие базисности по Риссу аффинной системы. Базисные свойства аффинной системы тесно связаны со свойствами дуальной функции, коэффициенты формального ряда по системе Хаара которой вычисляются с помощью простых рекуррентных соотношений, определяемых некоммутативной сверткой на двоичном дереве.

Всюду и далее порождающая функция $\varphi \in L_0^2$ аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ нормирована условием $(\varphi, \chi = 1)$. По-прежнему $\{x_n\}_{n=1}^\infty -$ последовательность коэффициентов Фурье–Хаара функции φ, так что $x_1 = 1$, и пусть

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \chi_\alpha$$

— ее ряд Фурье–Хаара.

Определим числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

По числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ создадим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом. Пусть $y_1 = 1$, при $n \geq 2$ для определения y_n воспользуемся заменой индекса, основанной на взаимно однозначном соответствии между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}$, при этом каждому n соответствует набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ коэффициентов двоичного разложения $n = 2^k + \sum_{v=1}^{k} \alpha_v 2^{k-v}$ и $\mathbb{A}$ — множество всех конечных наборов, состоящих из нулей и единиц. Числа $y_n = y_{k,j} = y(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = y_\alpha$ находим из рекуррентных соотношений

$$\sum_{v=0}^{k} x(\alpha_1, \dots, \alpha_v) y(\alpha_{v+1}, \dots, \alpha_k) = 0, \qquad k \geq 1.$$

При $v = 0$ и $v = k$ один из мультииндексов при x или y пустой, и тогда $x(\emptyset) = x_1 = 1$ и $y(\emptyset) = y_1 = 1$. Поэтому рекуррентные соотношения можно переписать в виде

$$-y(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = x(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \sum_{v=1}^{k-1} x(\alpha_1, \dots, \alpha_v) y(\alpha_{v+1}, \dots, \alpha_k).$$

Для определения $y(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ достаточно знать значения $x(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $1 \leq v \leq k$, расположенные на одной ветке двоичного дерева $\mathbb{A}$, и ранее вычисленные значения $y(\alpha_{v+1}, \dots, \alpha_k), 1 \leq v \leq k-1$, расположенные на одной ветке инвертированного двоичного дерева, где $i(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = (\alpha_k, \dots, \alpha_1)$ — инверсия мультииндекса. Таким образом, рассмотренные рекуррентные соотношения корректно определяют $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Указанные рекуррентные соотношения генерируются посредством операции некоммутативной свертки

$$(x*y)_\alpha = (x*y)(\alpha_1,\dots,\alpha_k) = \sum_{v=0}^{k} x(\alpha_1,\dots,\alpha_v)y(\alpha_{v+1},\dots,\alpha_k) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} x_\beta y_\gamma$$

(числовых функций (последовательностей), заданных на свободной полугруппе с двумя образующими (двоичном дереве) $\mathbb{A}$. Обозначим через $X(\mathbb{A})$ множество всех числовых функций последовательностей) $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и через $X^{-1}(\mathbb{A})$ множество всех $x \in X(\mathbb{A})$, для которых $x(\emptyset) = x_1 \neq 0$. Зададим элемент $e \in X(\mathbb{A})$ соотношением

$$e_\alpha = \begin{cases} 1, & |\alpha| = 0, \\ 0, & |\alpha| \geq 0. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $(X(\mathbb{A}),*)$ *является полугруппой с единицей* e (*моноидом*);
2) *для* $x \in X^{-1}(\mathbb{A})$ *и* $x', x'' \in X(\mathbb{A})$ *выполняются законы сокращения* $*$
   $x' = x * x'' \implies x' = x'', \quad x' * x = x'' * x \implies x' = x''$;
3) $X^{-1}(\mathbb{A})$ *совпадает с группой обратимых элементов моноида* $(X(\mathbb{A}),*)$.

Доказательство. 1) Ассоциативность операции свертки

$$\big(x*(y*z)\big)_\alpha = \sum_{\alpha=\beta\gamma\delta} x_\beta y_\gamma z_\delta = \big((x*y)*z\big)_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{A},$$

следует из ассоциативности конкатенации. Очевидно, что элемент е является двусторонней единицей: $x * e = e * x = x$ для всех $x \in X(\mathbb{A})$.

2) Докажем первый закон сокращения. Пусть $x * x' = x * x''$. При $|\alpha| = 0$ для пустого мультииндекса имеем $x(\emptyset)x'(\emptyset) = x(\emptyset)x''(\emptyset)$, откуда $x'(\emptyset) = x''(\emptyset)$ в силу условия $x(\emptyset) \neq 0$. Предположим, что равенства $x'_\beta = x''_\beta$ уже доказаны для всех $|\beta| < k$. Возьмем $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$. Имеем

$$x(\emptyset)x'(\alpha_1, \dots, \alpha_k) =$$
$$= (x * x')(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$
$$- \sum_{v=1}^{k} x(\alpha_1, \dots, \alpha_v)x'(\alpha_{v+1}, \dots, \alpha_k) =$$
$$= (x * x'')(\alpha_1, \dots, \alpha_k) - \sum_{v=1}^{k} (\alpha_1, \dots, \alpha_v)x''(\alpha_{v+1}, \dots, \alpha_k) =$$
$$= x(\emptyset)x''(\alpha_1, \dots, \alpha_k),$$

откуда $x'_\alpha = x''_\alpha$. Второй закон сокращения доказывается аналогично.

3) Пусть $x \in X^{-1}(\mathbb{A})$. Без ограничения общности можно предположить, что $x(\emptyset) = 1$. Тогда посредством рекуррентных соотношений определен элемент y такой, что $x * y = e$. Это означает, что y является правым обратным к x. Покажем, что он будет также и левым обратным. Положим $e' = y * x$. Будем иметь $x * e' = x * (y * x) = (x * y) * x = e * x = x * e$, откуда $e' = e$ по первому закону сокращения. Следовательно, $y = x^{-1}$ – (двусторонний) обратный к x элемент. Осталось заметить, что не принадлежащие множеству $X^{-1}(\mathbb{A})$ элементы заведомо не обратимы.

Дуальной функцией к порождающей функции φ аффинной системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть формальный ряд по системе Хаара

$$\varphi^d \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n \chi_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} y_\alpha \chi_\alpha,$$

где последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов формального ряда, определяющего дуальную функцию φ^d, связана с последовательностью $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов ряда Фурье–Хаара порождающей функции φ соответствующими рекуррентными соотношениями.

Входными данными являются, во-первых, порождающая функция $\psi \in L^1$ аффинной системы, удовлетворяющая условию нормировки $\int_0^1 \psi(x)dx = 1$, и, во-вторых, суммируемая функция f, которую требуется представить в виде ряда по аффинной системе посредством производящей формулы $f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \psi_n^*)\, \psi_n$. Первый шаг состоит в образовании числовой последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ по формулам:

$$u_0 = \int_0^1 \psi(x)dx = 1, \qquad u_n = \int_{2^{-k}j}^{2^{-k}(j+1/2)} \psi(x)dx - \int_{2^{-k}\left(j+\frac{1}{2}\right)}^{2^{-k}(j+1)} \psi(x)dx,$$

где $n = 2^k + j$ – стандартное представление числа $n \in N$.

Для этого требуется вычисление интегралов от функции ψ по двоично-рациональным отрезкам. При этом для получения конечной последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{2^{N-1}}$ из 2^N членов достаточно вычислить 2^N интегралов по двоично-рациональным отрезкам ранга N:

$$\int_{2^{-N}n}^{2^{-N}(n+1)} \psi(x)dx\,, \qquad n = 0, \dots, 2^N - 1.$$

На втором шаге исходя из последовательности $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ строится новая числовая последовательность $\{v\}_{n=0}^{\infty}$ с использованием рекуррентных соотношений

$$v(a_1, \dots, a_k) = -u(a_1, \dots, a_k) - \frac{1}{2}\sum_{v=1}^{k}(-1)^{a_v}\, u(a_1, \dots, a_{v-1})v(a_{v+1}, \dots, a_k).$$

Для получения конечной последовательности $\{v\}_{n=0}^{2^N-1}$ достаточно конечного набора значений $\{u\}_{n=0}^{2^N-1}$ исходной последовательности.

Третий шаг заключается в построении числовой последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ по функции f. Именно,

$$f_n = (f, \tilde{\varphi}_n), \qquad n = 0, 1, \dots,$$

где система функций $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана равенствами

$$\tilde{\varphi}_n = \tilde{\varphi}(a_1, \dots, a_k) =$$

$$= \tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_k) + \frac{1}{2}\sum_{v=1}^{k}(-1)^{a_v}\, v(a_{v+1}, \dots, a_k)\tilde{\varphi}^H(a_1, \dots, a_{v-1}).$$

Для определения конечной последовательности $\{f_n\}_{n=0}^{2^N-1}$ достаточно лишь конечных наборов значений $\{f_n^H\}_{n=0}^{2^N-1}$ и $\{v_n\}_{n=0}^{2^N-1}$.

Наконец, на четвертом шаге остается получить на выходе последовательность значений функционалов $\{l_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ по формулам

$$l_1(f) = f_0, \qquad l_{2n}(f) = -l_{2n+1}(f) = \frac{1}{2}(f_n + v_n f_0), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Представляющая функционалы $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ система функций $\{\psi_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}$ имеет вид

$$\psi_1^* = \tilde{\varphi}_0, \qquad \psi_{2n}^* = -\psi_{2n+1}^* = \frac{1}{2}(\tilde{\varphi}_n + v_n\tilde{\varphi}_0), \quad n = 1,2, \dots,$$

так что $l_n(f) = (f, \psi_n^*), n = 1,2, \dots$.

Практическое задание основывалось на шестой главе работы и заключалось в реализации соответствующего алгоритма нахождения коэффициентов биортогонального ряда.

С реализацией алгоритма можно ознакомиться в приложении работы.

Заключение. В ходе выполнения работы были реализованы поставленные цели и задачи: даны основные определения, в частности, определения аффинной системы функций и дуальной функции; сформулированы и доказаны основные теоремы, в частности, об образовании аффинной системой базиса Рисса; решена практическая задача подсчета коэффициентов биортогонального ряда.