МИНОБРНАУКИРОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и прикладной математики

Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для волнового уравнения с суммируемым потенциалом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Механико-математического факультета
Пашковой Яны Сергеевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ________________ В. В. Корнев
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ А. П. Хромов
подпись, дата

Саратов, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Метод Фурье - один из важнейших математических методов.

Впервые строгое обоснование метода Фурье смог дать академик В.А.Стеклов. Метод Фурье получил широкое распространение, в этой области были достигнуты значительные успехи И.Г.Петровским, В.И.Смирновым, О.А.Ладыженской, В.А.Ильиным.

Но у данного подхода есть существенный недостаток: требуется завышение гладкости начальных данных. В ходе исследований по ускорению сходимости рядов Фурье А.Н.Крылов разработал прием, который сводит вопрос о дифференцировании ряда к изучению двух других рядов, которые получаются путем разбиения первого. Один из этих рядов точно суммируется, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно дифференцировать почленно. А.Н.Крылов успешно преодолел трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования на ряде конкретных прикладных задач.

В.А.Чернятин, воспользовавшись приемом А.Н.Крылова и асимптотикой для собственных значений и собственных функций, успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, более того, в ряде случаев эти условия стали минимально возможными.

Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А.Н.Крылова, В.А.Чернятина, есть качественно новый шаг, позволяющий исследовать смешанные задачи методом Фурье с исчерпывающей полнотой. Кроме того ставится много новых важных вопросов в теории функций.

Резольвентный подход к методу Фурье, который излагается в работах А.П.Хромова, В.В.Корнева, М.Ш.Бурлуцкой позволяет найти решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с ослабленными условиями гладкости без использования информации о собственных и присоединенных функциях соответствующей спектральной задачи.

В данной работе исследуется резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом. Получены классическое и обобщенное решения в виде равномерно сходящихся рядов.

Целью данной работы является исследование вопросов сходимости формального решения по методу Фурье при различных ограничениях на функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$.

Данная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка использованных источников и приложения. Основная часть состоит из теоретической и практической частей и включает в себя 9 глав:

1. Постановка задачи;
2. Асимптотика собственных значений;
3. Формула для резольвенты;
4. Представление формального решения с помощью резольвенты;
5. Однородная смешанная задача;
6. Неоднородная смешанная задача с нулевым начальным условием;
7. Обобщенное решение смешанной однородной задачи;
8. Обобщенное решение смешанной задачи с нулевым начальным положением;
9. Нахождение собственных значений;

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 рассматривается смешанная задача следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\text{где } Q = [0,1] \times [0,\infty)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

где все функции комплекснозначные, причем

$$q(x), \varphi(x) \in L[0,1] \tag{4}$$

и $f(x,t) \in L[Q_T]$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ для любого положительного T.

Определение 1. *Классическим решением задачи (1.1)-(1.3) будем называть функцию $u(x,t)$, для которой выполняются следующие условия:*

1) функции $u(x,t)$, $u'_x(x,t)$, $u'_t(x,t)$ непрерывны,

2) $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (1.2)-(1.3),

3) $u'_x(x,t)$ при любом t абсолютно непрерывна по x,

4) $u'_t(x,t)$ при любом x абсолютно непрерывна по t,

5) $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду при всех $x,t \in Q_T$.

Определение 2. *Обобщенным решением задачи (1.1)-(1.3) будем называть функцию $u(x,t)$, являющуюся пределом последовательности классических решений $u_h(x,t)$ задачи*

$$\frac{\partial^2 u_h(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_h(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_h(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u_h(0,t) = u_h(1,t) = 0,$$

$$u_h(x,0) = \varphi_h(x), \quad u_{ht}^{'}(x,0) = 0,$$

при условиях

$$\lim_{h \to 0} ||\varphi_h - \varphi||_{L[0,1]} = 0,$$

а именно

$$\lim_{h\to 0}||u_h(x,t)-u(x,t)||_{L[Q_T]}=0.$$

Для существования классического решения задачи (1)-(3) необходимо, чтобы были выполнены следующие условия $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.

Основная цель работы - установить минимальные требования на функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$, при которых формальный ряд, построенный по методу Фурье сходится к классическому решению задачи (1)-(3).

В главе 2 исследовалась вспомогательная спектральная задача с вещественнозначным потенциалом, для которой была получена асимптотика собственных значений.

Подобная асимптотика справедлива и для комплекснозначного потенциала $q(x)$ на отрезке [0,1].

Также, как в разделе 2 доказывается асимптотика собственных значений $\lambda_n=\rho_n^2$ оператора L, который задается соотношениями:
$Ly=-y''(x)+q(x)y(x),\ \ y(0)=y(1)=0$. При достаточно больших n справедливо:

$$\rho_n=n\pi+\varepsilon_n, \quad n=n_0,n_{0+1},..., \quad \varepsilon_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В основе исследования данной ВКР лежит резольвентный подход, разработанный Августом Петровичем Хромовым. **В главе 3** дается определение резольвенты оператора L, вводится вспомогательная задача и доказывается лемма о явной формуле для резольвенты.

Определение 3. *Резольвентой оператора L называется оператор-функция*

$$R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1},$$

где E - единичный оператор, λ - спектральный параметр.

В главе 4 устанавливается связь метода Фурье со спектральной задачей для оператора второго порядка.

Вводятся в рассмотрение окружности $\theta_n = \{\rho : |\rho - \pi n| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, $n \geq n_0$, а номер n_0 таков, что внутри окружности θ_n находится единственное ρ_n. Через γ_n обозначается образ θ_n в λ-плоскости $(\lambda = \rho^2, \quad Re\rho \geq 0)$.

Формальное решение поставленной задачи по методу Фурье берется в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\Bigg[(R_\lambda\varphi)(x)\cos\rho t + \\ + \int\limits_0^t (R_\lambda f)(x,\tau)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\ \Bigg]\ d\lambda, \tag{5}$$

где значение $R_\lambda f$ - значение резольвенты на функции $f(x,\tau)$ как функции переменной x. Значение $r > 0$ фиксировано, а контур $|\lambda| = r$ таков, что содержит внутри только $\lambda_n, \quad n < n_0$, а на самом контуре собственных значений нет. Правая часть формулы представляет собой формальный ряд, построенный по методу Фурье.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3), для которого выполняется условие*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T] \tag{6}$$

при любом положительном T, то для такого $u(x,t)$ справедлива формула (5) и ряд сходится равномерно по x из отрезка $[0,1]$ для любого фиксированного значения переменной t. Притом такое решение единственно.

Решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{7}$$

где $u_1(x,t)$ - решение задачи (1)-(3) при $f(x,t) = 0$, $u_2(x,t)$ - решение задачи (1)-(3) при $\varphi(x) = 0$.

В главе 5 рассматривается частный случай задачи (1)-(3) при $f(x,t)=0$. Приводится теорема о существовании классического решения $u_1(x,t)$ полученной задачи.

В данной главе вводятся в рассмотрение оператор L_0 с собственными значениями $\lambda_n^0 = n^2\pi^2$ ($n=1,2,...$) и соответствующая этому оператору резольвента $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, где L_0 - оператор, который вводится аналогично оператору L при нулевом потенциале.

Пусть оператор L_0 есть оператор L при нулевом потенциале с собственными значениями $\lambda_n^0 = n^2\pi^2$ $(n=1,2,...)$, а R_λ^0 - резольвента данного оператора L_0.

Аналогично (7) представим $u_1(x,t)$ в виде суммы

$$u_1(x,t) = u_{10}(x,t) + u_{11}(x,t), \tag{8}$$

где $u_{10}(x,t)$ получается из $u_1(x,t)$ заменой $R_\lambda\varphi$ на $R_\lambda^0\varphi$, а $u_{11}(x,t)$ получается из $u_1(x,t)$ заменой $R_\lambda\varphi$ на $R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi$. Основной теоремой данного раздела является:

Теорема 2. *Если выполнены условия:* $\varphi(x), \varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны,* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi \in L_p[0,1]$ $(p > 1)$, *то классическое решение* $u_1(x,t)$ *задачи (1.1)-(1.3) существует при любом положительном* T.

Приводится ряд вспомогательных лемм, которые будут использоваться в дальнейшем.

В главе 6 рассматривается смешанная задача, в которой уравнение (1) содержит нулевой потенциал, а $\varphi(x) = 0$.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{10}$$

$$u(x,0) = 0, \quad {u'}_t(x,0) = 0. \tag{11}$$

Приводится теорема, справедливая для задачи (9)-(11).

Теорема 3. *Пусть* $f(x,t) \in L[Q_T]$, *тогда ряд формального решения сме-*

шанной задачи (9)-(11), найденного методом Фурье, сходится для любых x и t и его сумма представима в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\eta,\tau)d\eta, \tag{12}$$

где $F(\eta,\tau)$ - нечетная и 2-периодическая по η функция, причем $F(\eta,\tau) = f(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$.

Основной результат данной главы отражен в

Теорема 4. *Пусть $f(x,t) \in L[Q_T]$, почти при каждом x функция $f(x,t)$ является абсолютно непрерывной по t, и $F'_t(x,t) \in L[Q_T]$ для любого положительного T. Тогда существует классическое решение задачи (9)-(11) и оно задается формулой (12), причем $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$.*

В главе 7 изложена основная идея данной работы. Продолжается исследование задачи, поставленной в разделе 5. Для обоснования лемм и теорем данного раздела используются результаты глав 4-6.

Выводятся вспомогательные итерационные формулы, на основе которых строятся доказательства теорем:

Теорема 5. *Если $u_1(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(3) при $f(x,t) = 0$, тогда справедливо представление*

$$u_1(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t). \tag{13}$$

Ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно по x, $t \in Q_T$ для любого положительного T.

$$A(x,t) = v(x,t) \in L[Q_T].$$

Теорема 6. *Пусть $\varphi(x) \in L[0,1]$ и $u_{1h}(x,t)$ - классическое решение задачи (1)-(3) для $u_1(x,t)$ с $\varphi_h(x)$ вместо $\varphi(x)$,*

$$\lim_{h\to 0} ||\varphi_h - \varphi||_{L[0,1]} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{h\to 0}||u_{1h}(x,t)-v(x,t)||_{L[Q_T]}=0.$$

Функцию $v(x,t)$ можно рассматривать как обобщенное решение задачи (1)-(3) для $u_1(x,t)$.

В главе 8 исследуем $u_2(x,t)$ из (7) - это классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x)=0$. Полагаем, что $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.

Представляем ряд (5) для $u_2(x,t)$ в виде суммы

$$u_2(x,t)=u_{20}(x,t)+u_{21}(x,t),$$

где $u_{20}(x,t)$ есть $u_2(x,t)$ при замене $R_\lambda(f(x,\tau))$ на $R^0_\lambda(f(x,\tau))$, $u_{21}(x,t)$ получается из $u_2(x,t)$ заменой $R_\lambda(f(x,\tau))$ на $R_\lambda(f(x,\tau))-R^0_\lambda(f(x,\tau))$.

Используются рассуждения аналогичные рассуждениям в главе 5 и 7. Основным результатом данной главы считаем

Теорема 7. *Если $u_2(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x)=0$ и $f(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то*

$$u_2(x,t)=K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}k_n(x,t),$$

где

$$k_n(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}s_{n-1}(\eta,\tau)d\eta,\quad n\ge 1,$$

$$s_n(x,t)=-q(x)k_n(x,t),\quad n\ge 0,$$

и ряд $K(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T для любого положительного T.

Ряд $K(x,t)$ сходится при любой функции $f(x,t)\in L[Q_T]$. Пусть $w(x,t)$ - сумма функции $f(x,t)$. В этом случае справедлива теорема 7, причем из

$$\lim_{h\to 0}||f_h(x,t)-f(x,t)||_{L[Q_T]}=0$$

следует

$$\lim_{h \to 0} ||u_{2h}(x,t) - w(x,t)||_{C[Q_T]} = 0.$$

То есть функция w является обобщенным решением задачи (1)–(3) для $u_2(x,t)$.

В главе 9 приводится описание алгоритма построения кода для нахождения наименьших собственных значений краевой задачи. Целью практической части данной работы является разработка консольной программы на языке программирования Java, которая будет осуществлять поиск собственных значений краевой задачи из второго раздела и задавать соответственные собственные функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной магистерской работе исследовался резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом.

Важным результатом работы являются полученные итерационные формулы.

Доказательство основных теорем опирается на идею о представлении решения исходной задачи в виде суперпозиции решений частных случаев этой задачи.

В практической части работы реализован код для нахождения собственных значений простейшего случая смешанной задачи, поставленной в теоретической части.