

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

**Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с**  
наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом  
**суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий**  
**разных порядков**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студента (ки) 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Сабининой Юлии Алексеевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

А.П. Хромов

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

А.П. Хромов

инициалы, фамилия

Саратов 2019

# Введение

Работа состоит из двух главных разделов: Теоретическая часть и Практическая часть.

В Теоретической части данной работы рассматривается следующая смешанная задача для волнового уравнения с двухточечными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

$$u'_x(0, t) + \beta u'_x(1, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$\alpha u(0, t) + u(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad (4)$$

где  $q(x) \in L[0, 1]$ ,  $q(x)$  и  $\varphi(x)$ - комплекснозначные функции,  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$  - комплексные числа.

Нулевая функция в начальном условии  $u'_t(x, 0) = 0$  выбрана для упрощения изложения.

Считаем также выполненным соотношение

$$1 + \alpha\beta \neq 0,$$

представляющее собой условие регулярности Биргофа оператора Штурма - Лиувилля  $L$ :

$$(Ly)(x) = -y''(x) + q(x)y(x),$$

$$U_1(y) = y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0,$$

$$U_2(y) = \alpha y(0) + y(1) = 0,$$

связанного с методом Фурье для задачи (1)-(4).

Условия (2), (3) примечательны тем, что для них возможен случай больших по модулю кратных собственных значений и наличие бесконечного множества присоединенных функций. Именно этот наиболее трудный для исследования случай рассматривается в настоящей работе.

В данной работе используется прием А.Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье, который сильно ослабил условия гладкости, а точнее сделал их минимально возможными, а также позволил решить вопрос о дифференцируемости суммы рядов, не прибегая к исследованию равномерной сходимости продифференцированных рядов.

Данная же работа опирается на статью А.П. Хромова и М.Ш. Бурлуцкой, в которой получено классическое и обобщенное решение задачи (1)-(4).

Целью теоретической части работы является изучение резольвентного подхода в методе Фурье, приема Крылова ускорения сходимости рядов Фурье на примере задачи, описанной ранее.

Целью практической части данной работы является изучение следующей задачи Штурма - Лиувилля:

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad (5)$$

$$U_1(y) = y'(0) + \alpha y(0) = 0, \quad (6)$$

$$U_2(y) = y(1) = 0, \quad (7)$$

$\alpha$ - вещественное, а также создание программы для нахождения её собственных значений, при различных значениях  $\alpha$ .

Практическая часть состоит из трех подпунктов. В "Описании задачи" приведены теоретические знания о том, какие собственные значения имеет задача (5)-(7), а также получены формулы, по которым они будут найдены.

В "Описании программного кода" подробно разобраны методы, входящие в состав кода. "Описание работы с программой" показывает работу со стороны пользователя, а также демонстрирует полученные графики в зависимости от его желания.

В Приложении А представлен код программы, работу которого описывает Практическая часть.

# 1 Основное содержание работы

Теоретическая часть данной работы состоит из двух подразделов: Классическое решение задачи и Обобщенное решение.

Раздел "Классическое решение" посвящен поиску такого для исходной задачи (1)-(4).

Под классическим решением рассматриваемой задачи следует понимать функцию  $u(x, t)$ , абсолютно непрерывную вместе с первыми производными по  $x$  и по  $t$ , удовлетворяющую граничным и начальным условиям (2)-(4) и дифференциальному уравнению (1) почти всюду.

Считаем, что  $b_1 = b_2 = b$ . Этот случай наиболее труден для исследования из-за одинаковой асимптотики собственных значений (возможны случаи кратных, сколь угодно больших собственных значений, и появление присоединенных функций в любом количестве).

**Лемма 1.** *Соотношение  $b_1 = b_2 = b$  имеет место лишь в случаях а)  $\alpha = -1, \beta \neq 1$ ; б)  $\beta = -1, \alpha \neq 1$ ; в)  $\alpha = 1, \beta \neq -1$ ; г)  $\beta = 1, \alpha \neq -1$ ;*

Обозначим  $\tilde{\gamma}_n = \{\rho : |\rho - b - 2\pi n| = \delta\}$ , где число  $\delta > 0$  достаточно мало и не зависит от  $n$ . Пусть число  $n_0$  такое, что внутри и на каждой окружности  $\tilde{\gamma}_n$  при  $n \geq n_0$  находятся  $\rho_n$  и  $\rho'_n$  и нет других квадратных корней из собственных значений.

Пусть  $\gamma_n$  - образ  $\tilde{\gamma}_n$  в  $\lambda$ -плоскости. Далее, пусть  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  - резольвента оператора  $L$ , где  $E$  - единичный оператор,  $\lambda$  - спектральный параметр.

Формальное решение задачи (1)-(4) по методу Фурье рассматриваем в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda, \quad (8)$$

где  $\gamma_r = \{\lambda : |\lambda| = r\}, r > 0$ , фиксировано и таково, что внутри  $\gamma_r$  находятся все собственные значения оператора  $L$ , не попавшие в  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$ .

Если все собственные значения простые, то очевидно, что обычное фор-

мальное решение задачи (1)-(4) по методу Фурье можно представить в виде (8). Если же есть кратные собственные значения, то (8) мы будем называть формальным решением задачи (1)-(4) в этом случае.

Отметим, что теперь в (8) не фигурируют явно ни собственные значения, ни собственные функции.

**Лемма 2.** Пусть  $\mu_0$  — фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора  $L$ , и  $\gamma$  — один из контуров  $\gamma_r, \gamma_n$  при  $n \geq n_0$  ( $\mu_0$  вне  $\gamma$ ). Тогда

$$\int_{\gamma} (R_{\lambda} \varphi) \cos \rho t d\lambda = \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_{\lambda} g) \cos \rho t d\lambda, \quad (9)$$

где  $g = (L - \mu_0 E) \varphi$ .

По лемме 2 формальное решение  $u(x, t)$  представим в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_{\lambda} g) \cos \rho t d\lambda. \quad (10)$$

Для формирования эталонной смешанной задачи рассмотрим оператор  $L_0$ :

$$L_0 y = -y''(x), \quad y'(0) + \beta y'(1) = 0, \quad \alpha y(0) + y(1) = 0.$$

Далее, будем считать, что  $\mu_0$  не является также и собственным значением оператора  $L_0$ , и  $n_0$  таково, что все собственные значения и оператора  $L_0$  при  $n \geq n_0$  попадают лишь в  $\gamma_n$ . Тогда имеет смысл представление

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_{\lambda}^0 g) \cos \rho t d\lambda. \quad (11)$$

где  $R_{\lambda}^0 = (L_0 - E)^{-1}$ .

По лемме 2, применимой к  $R_{\lambda}^0$  вместо  $R_{\lambda}$  и  $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$  вместо  $\varphi$ , формула (11) принимает вид

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_{\lambda}^0 \varphi_1) \cos \rho t d\lambda.$$

т.е.  $u_0(x, t)$  есть формальное решение следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u'_t(x, 0) = 0,$$

$$u'_x(0, t) + \beta u'_x(1, t) = \alpha u(0, t) + u(1, t) = 0,$$

которую мы назовем эталонной.

Будем считать, что функции  $\varphi(x)$ ,  $\varphi'(x)$  абсолютно непрерывны,  $U_1(\varphi) = U_2(\varphi) = 0$  и  $L\varphi \in L_p[0, 1]$  ( $1 < p \leq 2$ ).

Относительно формального решения справедлива

**Теорема 1.** *Формальное решение  $u(x, t)$  задачи (1)-(4) представляется в виде*

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda^0 g) \cos(\rho t) d\lambda, \\ u_1(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g - R_\lambda^0 g) \cos(\rho t) d\lambda, \end{aligned} \quad (13)$$

число  $\mu_0$  не является собственным значением операторов  $L$  и  $L_0$ ,  $|\mu_0| > r$  и  $\mu_0$  находится вне  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$ ,  $g = (L - \mu_0 E)\varphi$ .

Следующими разделами в нахождении классического решения задачи (1)-(4) являются разделы 'Исследование функции  $u_0(x, t)$ ' и 'Исследование функции  $u_1(x, t)$ '.

Положим

$$\Omega_\rho(g)(x) = v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0).$$

**Лемма 3.** *Имеет место формула*

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_{\lambda}^0 g) \cos \rho t d\lambda = \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \Omega_{\rho}(g)(x) \cos \rho t d\lambda,$$

где  $\gamma$  либо  $\gamma_r$ , либо  $\gamma_n$  при  $n \geq n_0$ .

**Лемма 4.** *Имеет место формула*

$$\Omega_{\rho}(g)(x) \cos \rho t = \frac{1}{2} [\Omega_{\rho}(g)(x+t) + \Omega_{\rho}(g)(x-t)].$$

Положим

$$\omega_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \Omega_{\rho}(g)(x) d\lambda, \quad \omega(x) = \sum_{n \geq n_0}^{\infty} \omega_n(x).$$

**Лемма 5.** *Ряды  $\sum \omega_n(x)$  и  $\sum \omega'_n(x)$  сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке  $(-\infty, \infty)$ .*

Таким образом, ряд  $\omega(x)$  сходится абсолютно и равномерно по  $x \in [-A, A]$  при любом  $A > 0$ . Далее получаем, что  $(g, z_1^0) = O(\tilde{\beta}_n(\mu))$ ,  $(g, z_2^0) = O(\tilde{\beta}_n(\mu))$ , где теперь в  $\tilde{\beta}_n(\mu)$  входят только те  $|\beta_n(\mu)|$ , для которых выполняется равенство  $m(x) = g(x)$ . Значит,

$$\omega'_n(x) = \int_{\gamma_n} O\left(\frac{1}{n} \tilde{\beta}_n(\mu)\right) |d\mu|,$$

где  $\gamma = \{\mu : |\mu - \beta| = \delta\}$ . Отсюда по лемме 9 ряд  $\omega'(x) = \sum \omega'_n(x)$  сходится абсолютно и равномерно на  $[-A, A]$ .

Пусть

$$\Phi(x) = \omega(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \Omega_{\rho}(g)(x) d\lambda.$$

**Лемма 6.** *Если  $x \in [0, 1]$ , то  $\Phi(x) = \varphi_1(x) = R_{\mu_0}^0 g$ .*

**Лемма 7.** *Функция  $\Phi(x)$  принадлежит пространству  $C^1(-\infty, +\infty)$ , при-*

чем

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \frac{1}{1+\alpha\beta}[(1-\alpha\beta)\Phi(x) - 2\beta\Phi(1-x)] \\ \Phi(1+x) &= \frac{1}{1+\alpha\beta}[-2\alpha\Phi(x) - (1-\alpha\beta)\Phi(1-x)].\end{aligned}$$

Так как функции  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi'_1(x)$  абсолютно непрерывны и производная  $\varphi''_1(x)$  принадлежит пространству  $L_p[0, 1]$ , то производная  $\Phi'(x)$  абсолютно непрерывна, причем

$$\|\Phi''(x)\|_{L_p[-A, A]} \leq C_A \|g\|_p.$$

**Теорема 2.** *Функция  $u_0(x, t)$  является классическим решением эталонной задачи*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ u'_x(0, t) + \beta u'_x(1, t) &= \alpha u(0, t) + u(1, t) = 0, \\ u_x(0, t) &= \varphi_1(x), \quad u'_t(x, 0) = 0,\end{aligned}\tag{14}$$

где уравнение (14) удовлетворяется почти всюду.

Положим  $a(x, t) = \sum_{n \geq n_0} a_n(x, t)$ , где

$$a_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} J(x, \rho) \cos(\rho t) d\lambda,$$

$$J(x, \rho) = v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2) - v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0).$$

**Лемма 8.** *Ряды  $\sum a_{n,tj}^{(j)}(x, t)$  ( $j = 0, 1, 2$ ),  $\sum a_{n,xj}^{(j)}(x, t)$  ( $j = 0, 1$ ) сходятся абсолютно и равномерно в прямоугольнике  $Q_T = [0, 1] \times [-T, T]$  при любом  $T > 0$ .*

**Лемма 9.** *Функция  $u'_{1x}(x, t)$  абсолютно непрерывна по  $x$  и при почти*

всех  $x$  и  $t$  в прямоугольнике  $Q_T$  справедливо равенство

$$u''_{1x^2}(x, t) = q(x)u(x, t) + d(x, t),$$

где

$$d(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{\lambda}{\lambda - \mu_0} J(x, \rho) \cos(\rho t) d\lambda,$$

и ряд  $d(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно в  $Q_T$ .

В итоге классическое решение задачи (1)-(4) описывает следующая теорема:

**Теорема 3.** Если  $q(x) \in L[0, 1]$ , функции  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x)$  абсолютно непрерывны,  $U_1(\varphi) = U_1(\varphi) = 0$ ,  $L\varphi \in L_p[0, 1]$  ( $1 < p \leq 2$ ), то сумма  $u(x, t)$  ряда формального решения обладает следующими свойствами: функция  $u(x, t)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $t$ ; функция  $u'_x(x, t)$  ( $u'_t(x, t)$ ) абсолютно непрерывна по  $x$  (по  $t$ ); удовлетворяет уравнению (1) почти всюду и условиям (2)-(4); т.е. является классическим решением задачи (1)-(4), когда уравнение (1) удовлетворяется почти всюду.

Следующим разделом теоретической части является "Обобщенное решение краткое содержание которого состоит в следующем:

Далее считаем, что  $\varphi(x) \in L_p[0, 1]$   $p \leq 2$ . Формальное решение задачи (1)-(4) представим теперь в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (15)$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \varphi) \cos(\rho t) d\lambda,$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi - R_\lambda^0 \varphi) \cos(\rho t) d\lambda.$$

**Лемма 10.** Ряд  $u_1(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно в прямоуголь-

нике  $Q_T$  при любом  $T > 0$ , причем

$$\max_{Q_T} |u_1(x, t)| \leq C_T \| \varphi \|_p, \quad (16)$$

где константа  $C_T$  зависит только от  $T$ .

Рассмотрим функцию  $u_0(x, t)$ . Ограничимся здесь лишь одним частным случаем, но содержащим все трудности общего случая. Будем считать  $\beta = -1$ ,  $\alpha = 0$  в задаче (1)-(4). Тогда

$$L_0 y = -y''(x), \quad y'(0) - y'(1) = y(1) = 0.$$

Если в операторе  $L_0$  перейдем от  $x$  к  $\tau = 1 - x$ , то оператор  $L_0$  перейдет в оператор  $\tilde{L}_0$  :

$$\tilde{L}_0 y = -y''(x), \quad y'(0) - y'(1) = y(0) = 0.$$

**Лемма 11.** Резольвенты  $R_\lambda^0$  и  $\tilde{R}_\lambda^0$  операторов  $L_0$  и  $\tilde{L}_0$  связаны равенством  $SR_\lambda^0 = \tilde{R}_\lambda^0 S$ , где  $Sf(x) = f(1 - x)$ .

**Лемма 12.** Имеет место равенство  $u_0(x, t) = S_x \tilde{u}_0(x, t)$ , где запись  $S_x$  означает, что оператор  $S$  применяется по переменной  $x$ , функция  $\tilde{u}_0(x, t)$  — формальное решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$$u'_x(0, t) - u'_x(1, t) = u(0, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(1 - x), \quad u'_t(x, 0) = 0.$$

**Лемма 13.** Ряд  $u_0(x, t)$  сходится почти всюду по  $x$  и по  $t$ , равенство  $u_0(x, 0) = \varphi(x)$  выполняется почти всюду в  $[0, 1]$  и

$$\| u_0(x, t) \|_{L_p[Q_T]} \leq C_T \| \varphi \|_p . \quad (17)$$

Пусть  $p > 2$ . Тогда, очевидно, что оценка (16) имеет место и в этом случае. Поэтому из (16) получаем, что  $\| \tilde{u}_1(x, t) \|_{L_p[Q_T]} \leq C_T \| \varphi \|_p$ . Далее имеем  $\| \tilde{u}_0(x, t) \|_{L_p[Q_T]} \leq C_T \| \varphi \|_p$ , и тем самым из изложенного выше вытекает

**Теорема 4.** Если  $q(x) \in L[0, 1]$ ,  $\varphi(x) \in L_p[0, 1]$  ( $p > 1$ ), то ряд (15) формального решения  $u(x, t)$  задачи (1)-(4) в случае краевых условий (2), (3) при  $\beta = -1$ ,  $\alpha = 0$  сходится почти всюду по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in (-\infty, +\infty)$ , причем  $u(x, 0) = \varphi(x)$  почти всюду на  $[0, 1]$ . Более того, если функция  $\varphi_h(x)$  абсолютно непрерывна вместе со своей производной,  $U_1(\varphi_h) = U_2(\varphi_h) = 0$ ,  $L\varphi_h \in L_p[0, 1]$  и  $\| \varphi_h - \varphi \|_p \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то решение  $u_h(x, t)$  задачи (1)-(4) при  $\beta = -1$ ,  $\alpha = 0$  с такой функцией  $\varphi_h(x)$  сходится к  $u(x, t)$  в пространстве  $L_p[Q_T]$  при любом  $T > 0$ .

Таким образом, функция  $u(x, t)$  является обобщенным решением задачи (1)-(4) в случае  $\beta = -1$ ,  $\alpha = 0$ .

Раздел "Описание задачи" практической части содержит следующие выводы:

Рассмотрим следующую задачу Штурма - Лиувилля :

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad (1)$$

$$U_1(y) = y'(0) + \alpha y(0) = 0, \quad (2)$$

$$U_2(y) = y(1) = 0. \quad (3)$$

Требуется найти несколько минимальных по модулю собственных значений данной задачи. Параметр  $\alpha$  является переменным.

**Теорема 1.** Все собственные значения задачи (1)-(3) являются вещественными.

**Теорема 2.** Если  $\alpha \leq 0$ , то все собственные значения задачи (1)-(3) положительны.

**Лемма 1.** Если  $\alpha \neq 1$ , то оператор  $Lu$  является самосопряженный.

В данном разделе также описаны формулы, по которым будут найдены

собственные значения задачи (1)-(3).

Следующим пунктом Практической части является 'Описание программного кода', в котором воспользовавшись теорией, описанной в первом пункте, описан программный код, который реализует нахождение пяти отличных от нуля собственных значений в зависимости от введенного пользователем параметра  $\alpha$ .

В Приложении А описан код программы, написанный на языке Java, который создает приложение с графическим интерфейсом. При компиляции данного кода, создается окно, в котором далее будет работать пользователь.

Раздел 'Описание работы пользователя с программой' демонстрирует результаты выполнения программы. В нем приведены примеры со следующими значениями параметра  $\alpha := \{-0.5, 0, 1, 2.5\}$ .

## Заключение

В Теоретической части данной работы была рассмотрена смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом и разнопорядковыми двухточечными граничными условиями (1)-(4) в случае, когда соответствующая спектральная задача может иметь кратный спектр.

Основываясь на резольвентном подходе в методе Фурье и приеме А.Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье, получено классическое решение  $u(x, t)$  этой задачи при минимальных требованиях на начальное условие  $u(x, 0) = \varphi(x)$ .

С использованием теоремы Карлесона-Ханта установлена сходимость почти всюду ряда формального решения в предельном случае  $\varphi(x) \in L_p[0, 1]$  при  $p > 1$  и показано, что формальное решение является обобщенным решением задачи (1)-(4).

В Практической части работы была рассмотрена задача Штурма-Лиувилля (5)-(7), для которой требовалось найти собственные значения. Для этого на языке Java было создано оконное приложение с графическим интерфейсом, которое позволяет в зависимости от введенного пользователем значения параметра  $\alpha$ , найти пять собственных значений, а также рисует график, точки пересечения которого с осью  $OX$  ими и являются.