МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

О кратной полноте корневых функций некоторых классов нерегулярных пучков обыкновенных дифференциальных операторов

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления(специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Сергушовой Марии Викторовны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент		В. С. Рыхлов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор		А. П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов, 2019 год

Введение. Теории полиномиальных операторных пучков посвящено очень много работ. Многие задачи математической физики приводят к изучению спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов или пучков таких операторов, которое включает в себя задачи нахождения спектра и собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций, разложения произвольной функции в ряд по корневым функциям, вопросы полноты и базисности системы корневых функций. Полнота системы корневых функций является очень важным свойством. Без этого свойства, например, не может идти речь о базисности системы корневых функций.

Основополагающей по вопросу полноты корневых функций пучка является работа М.В. Келдыша, в которой была сформулирована без доказательства теорема об n-кратной полноте корневых функций частного случая пучка $L(\lambda)$, а именно пучка, порожденного дифференциальным выражением со специальной главной частью

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n} \quad (2l > n). \end{cases}$$

В 1973 году эта теорема была доказана А.П. Хромовым в случае аналитических коэффициентов дифференциального выражения, а в 1976 А.А. Шкаликов доказал эту теорему в случае суммируемых коэффициентов.

Наиболее полное исследование вопроса о кратной полноте корневых функций пучка $L(\lambda)$, дифференциальное выражение которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия полураспадающиеся, провел А. И. Вагабов в серии своих работ 1981–1987 годов. Также данный вопрос в своих работах рассматривает В. С. Рыхлов, начиная с 1992 года.

В магистерской работе рассматривается пучок $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами

$$\ell_0(y,\lambda) = \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \quad p_{n0} \neq 0, \tag{0.1}$$

и нормированными краевыми условиями:

$$U_i^0(y,\lambda) = U_{i0}^0(y,\lambda) + U_{i1}^0(y,\lambda) := \sum_{j+s\leqslant\varkappa_i} \lambda^s(\alpha_{ijs}y^{(j)}(0) + \beta_{ijs}y^{(j)}(1)) = 0,\ i = \overline{1,n}. \tag{0.2}$$

Порядок i -го краевого условия есть $\varkappa_i$, $(0 \leqslant \varkappa_i \leqslant n-1)$, а суммарный порядок краевых условий (0.2) обозначим $\varkappa$. Пучок (0.1), (0.2) будем обозначать $L_0(\lambda)$.

Также в данной работе описывается метод, который позволяет исследовать вопрос о полноте корневых функций пучка (0.1) — (0.2).

Работа состоит из введения, раздела «Определения и обозначения», трёх основных разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Во введении дается постановка задачи и обосновывается её актуальность, содержатся краткие сведения о данной работе.

В разделе «Определения и обозначения» содержатся вспомогательные обозначения и определения, необходимые при исследовании поставленной задачи.

В первом и втором разделах содержатся леммы и теоремы, необходимые для изучения вопроса, затронутого в магистерской работе.

В третьем разделе приводится практическая составляющая магистерской работы, а именно, построение характеристических многоугольников в среде MatLab.

В приложении приводится код программы, написанный в среде MatLab.

Основное содержание работы. В первом разделе рассматривается полиномиальный пучок обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$.

Для формулировки основного результата предполагаем, что $0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n$, где ω_j, $j = \overline{1,n}$ – корни характеристического уравнения дифференциального выражения $l_0(y,\lambda)$. Тогда функции

$y_j(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_j x}, \quad j=\overline{1,n}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $l_0(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$.

В рассмотрение вводятся следующие вектор-столбцы при $j=\overline{1,n}$

$$H_j(\lambda) = (h_{1j}(\lambda), h_{2j}(\lambda), \ldots, h_{nj}(\lambda))^T := (U_1^0(y_j,\lambda), U_2^0(y_j,\lambda), \ldots, U_n^0(y_j,\lambda))^T,$$

$$V_j(\lambda) = (v_{1j}(\lambda), v_{2j}(\lambda), \ldots, v_{nj}(\lambda))^T := (U_{10}^0(y_j,\lambda), U_{20}^0(y_j,\lambda), \ldots, U_{n0}^0(y_j,\lambda))^T,$$

$$W_j(\lambda) = (w_{1j}(\lambda), w_{2j}(\lambda), \ldots, w_{nj}(\lambda))^T := \\ = e^{-\lambda\omega_j}(U_{11}^0(y_j,\lambda), U_{21}^0(y_j,\lambda), \ldots, U_{n1}^0(y_j,\lambda))^T.$$

и следующее решение уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$

$$y(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \begin{vmatrix} 0 & \vdots & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\Gamma(\lambda) & \vdots & H_1(\lambda) & \ldots & H_n(\lambda) \end{vmatrix}, \tag{0.3}$$

зависящее от вектор-столбца $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), \ldots, \gamma_n(\lambda))^T$, который является параметром. В введении параметра $\Gamma(\lambda)$ и рассмотрении функций вида (0.3) заключается метод порождающих функций. Функции (0.3) играют важную роль при доказательстве полноты системы корневых функций пучка $L_0(\lambda)$.

Обозначив $\Lambda_0 = \{\lambda_k\}\cup\{0\} = \Lambda\cup\{0\}$, рассматривается следующая лемма.

Лемма 1. *При $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\Lambda_0$ функции $y(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j=\overline{1,n}$ линейно независимы по $x\in[0,1]$ тогда и только тогда, когда линейно-независимы вектор-функции $\Gamma_j(\lambda)$, $j=\overline{1,n}$.*

Через Ω_j обозначим подмножество тех точек из Ω, которые представляются в виде $\omega_j+\ldots$, то есть содержат в качестве слагаемого число ω_j. Через Ω^j обозначим множество $\Omega\backslash\Omega_j$, то есть те точки из Ω, которые не содержат в качестве слагаемого число ω_j.

Далее будем считать, что $\Gamma(\lambda)$ есть вектор-полиномы по λ вида $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda)), \ldots, \gamma_n(\lambda))^T$, где

$$\gamma_j(\lambda) = \gamma_{j,\varkappa_j}\lambda^{\varkappa_j} + \gamma_{j,\varkappa_j-1}\lambda^{\varkappa_j-1} + \ldots + \gamma_{j,0}, \quad j=\overline{1,n}.$$

Раскрывая определитель (0.3) по первой строке, получим

$$y(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) = \lambda^{\varkappa} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\omega \in \Omega^k} G_k^{\omega}(\lambda) e^{\lambda(\omega_k x + \omega)},$$

где $G_k^{\omega}(\lambda) = O(1)$ при $|\lambda| \gg 1$.

Назовем характеристическим многоугольником порядка r $(0 \leqslant r \leqslant \varkappa)$ функции $y(x, \lambda, \Gamma(\lambda))$ выпуклую оболочку тех точек $\{\omega_k x + \omega\}$, $k = \overline{1, n}$, $\omega \in \Omega^k$, для которых $[G_k^{\omega}]_r \not\equiv 0$. Обозначим этот характеристический многоугольник как $\left(M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\right)_r$. Многоугольник $\left(M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\right)_{\varkappa}$ кратко обозначим $M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}$. Будем называть $\mathrm{conv}_{x \in [0,1]} \left\{M_{y(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}\right\}$ характеристическим многоугольником вектора $\Gamma(\lambda)$ и обозначать $M(\Gamma)$.

Тогда справедлив леммы, представленных ниже.

Лемма 2. *Для фиксированного индекса* $j, (1 \leqslant j \leqslant n)$ *имеет место включение* $M(V_j) \subset \mathrm{conv}\,\{M_{\Delta}, \Omega_j\}$.

Лемма 3. *Для фиксированного индекса* j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *имеет место включение* $M(W_j) \subset \mathrm{conv}\,\{M_{\Delta}, \Omega^j\}$.

Во втором разделе рассматривается тот же полиномиальный пучок обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0, 1]$ и для него исследуется достаточное условие полноты.

В данном разделе в рассмотрение вводится мероморфная функция

$$\mathcal{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \frac{H(\lambda, \Gamma(\lambda))}{\Delta(\lambda)},$$

где

$$H(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \int_0^1 y(x, \lambda, \Gamma(\lambda))\, h_m(x, \lambda)\, dx,$$

а $h_m(x, \lambda) = h_1(x) + \lambda h_2(x) + \ldots + \lambda^{m-1} h_m(x)$.

Данная функция формально имеет полюса в точках $\lambda \in \Lambda$, но все эти полюса компенсируются числителем, за исключением случая, когда $\lambda = 0$ является нулем $\Delta(\lambda)$, но не является собственным значением или является собственным значением меньшей кратности.

Определение 1. *Будем говорить, что вектор-функция $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию (α) (обозначим $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$), если в λ-плоскости существует по крайней мере три луча, исходящие из начала, каждые два соседних из которых имеют между собой угол меньше π и на которых функция $\mathcal{H}(\lambda, \Gamma(\lambda))$ имеет не более чем степенной рост.*

Важную роль далее играет следующие лемма и теорема.

Лемма 4. *Либо система корневых функций пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно полна в* $L_2[0,1]$*, либо соответствующая система производных n-цепочек $\tilde{y}_k$, построенная по системе корневых функций пучка $L_0(\lambda)$, имеет бесконечный дефект в* $L_2[0,1]$.

Теорема 1. *Если существует n линейно независимых вектор-функций* $\Gamma_1(\lambda), \Gamma_1(\lambda), \ldots, \Gamma_n(\lambda) \in (\alpha)$*, то система корневых функций пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно полна в* $L_2[0,1]$.

С учетом лемм 2 и 3 из первого раздела очень удобно в качестве $\Gamma_j(\lambda)$ брать векторы $V_i(\lambda)$ и $W_i(\lambda)$.

Следствие 1. *Если $V_{i_s}(\lambda) \in (\alpha)$, $s = \overline{1,k}$, $W_{j_t}(\lambda) \in (\alpha)$, $t = \overline{1,l}$, $k + l \geqslant n$ и*

$$\operatorname{rank}\,(V_{i_1}(\lambda), V_{i_2}(\lambda), \ldots, V_{i_k}(\lambda), W_{j_1}(\lambda), \ldots, W_{j_l}(\lambda)) = n,$$

то система корневых функций пучка $L_0(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Из-за специфической структуры функции $y(x, \lambda, \Gamma(\lambda))$, определяемой формулой (0.3), удалось доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если существует m пар векторов $\{V_{j_s}(\lambda), W_{j_s}(\lambda)\}$, $s = \overline{1,m}$ таких, что $V_{j_s}(\lambda) \in (\alpha), W_{j_s}(\lambda) \in (\alpha)$, то имеет место m-кратная полнота в* $L_2[0,1]$ *системы корневых функций пучка $L_0(\lambda)$ с возможным конечным дефектом.*

В третьем разделе описана работа программы по построению характеристических многоугольников в среде MATLAB, а также приведены несколько примеров пучка $L_0(\lambda)$ третьего порядка, для которых выполнено построение данных многоугольников. Приведём ниже один из примеров.

Пусть дан пучок обыкновенных дифференциальных операторов третьего порядка вида:

$$y''' - \lambda y'' + \lambda^2 y' - \lambda^3 y = 0,$$

$$y(0) + y(1) = y'(0) + iy'(1) = y''(0) - y''(1) = 0.$$

Внесем известные данные в программу:

```
>> omega=[-i,1,i]; kappa=[0,1,2];
>> alpha=[1,0,0;1,0,0;1,0,0]; beta=[1,0,0; i,0,0; -1,0,0];
```

Далее выделяем массивы вещественных и мнимых частей элементов ω_j и определяем число этих элементов.

```
>> X=real(omega); Y=imag(omega); n=length(omega);
```

Вызываем функции для построения множества Ω и получения его графического представления.

```
>> [OmegaX, OmegaY, OmegaS]=Omega(n,X,Y);
>> plotSet(OmegaX, OmegaY, OmegaS)
```

Следующим шагом вызываем функцию по построению минимальной выпуклой оболочки множества Ω и получаем графическое представление данного множества в отдельном окне.

```
>> [MX, MY, MS]=LS(OmegaX, OmegaY, OmegaS); hold on
>> figure
>> plotGraphic(MX, MY, MS)
```

Теперь переходим к нахождению M_Δ и вводим символьные константы.

```
>> syms x lambda y; y=exp(lambda*omega*x);
```

Переходим к нахождению векторов V_j и W_j:

```
>> [V,W]=initial(n);
>> for i=1:n
for j=1:n
for k=0:kappa(i)
```

```
for s=0:kappa(i)
if(k+s)==kappa(i)
V(i,j)=V(i,j)+lambda^s*alpha(k+1,s+1)*subs(diff(y(j),x,k),x,0);
W(i,j)=W(i,j)+exp(-lambda*omega(j))*
               lambda^s*beta(k+1,s+1)*subs(diff(y(j),x,k),x,1);
end end end end end
```

Вызываем функцию, которая вычисляет векторы $\hat{V}_j$ и $\hat{W}_j$:

```
>> [VHat,WHat]=powArr(V,W);
```

Обращаемся к функции `determs`, которая вычислит индексы всех элементов, входящих в M_Δ:

```
>> Flag=determs(VHat,WHat)
Flag = 0     3    23   123
```

С помощью функции `MD` мы по индексам определяем координаты точек множества M_Δ и после этого строим получившееся множество графически:

```
>> MD(OmegaX, OmegaY, OmegaS, Flag)
```

Ниже представлены все графические объекты, полученные в рамках работы программы (см. рисунки 1 — 3):

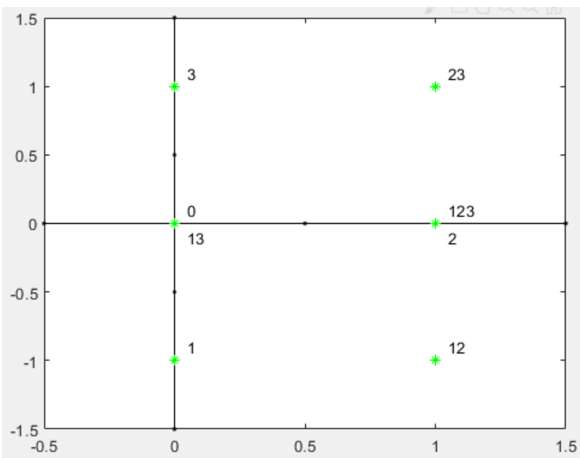

Рисунок 1 — Множество Ω

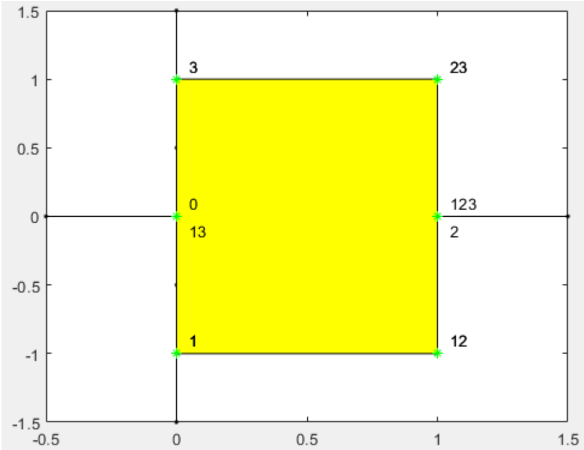

Рисунок 2 — Множество M

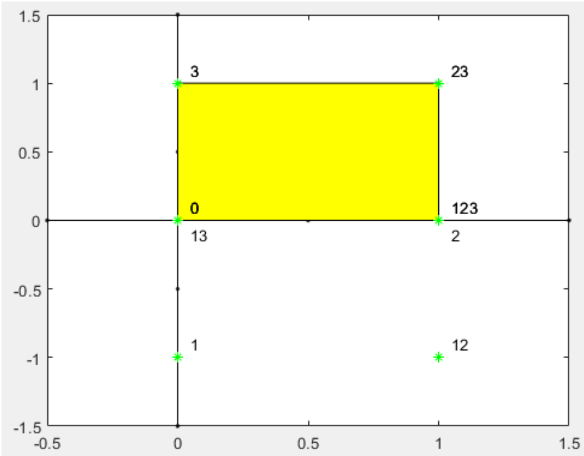

Рисунок 3 — Множество M_Δ

Теперь перейдем к построению множеств $\mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega^j\}$ и $\mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega_j\}$, $j = \overline{1,3}$. Например, для $j = 1$ построение $\mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega_j\}$ выглядит следующим образом (см. рисунок 4):

```
>> [ix1,iy1,is1]=inW (1, OmegaX, OmegaY);
>> comm(ix1,iy1,is1,XS,YS,NN);
```

Построение множеств $\mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega^j\}$ осуществляется аналогично, но за счет использования противоположной функции (см. рисунок 5):

```
>> [ox1,oy1,os1]=outW (1, OmegaX, OmegaY);
>> comm(ox1,oy1,os1,XS,YS,NN);
```

Для $j = 2$ и $j = 3$ мы получим множества, которые имеют следующие графические представления (см. рисунки 6 — 9):

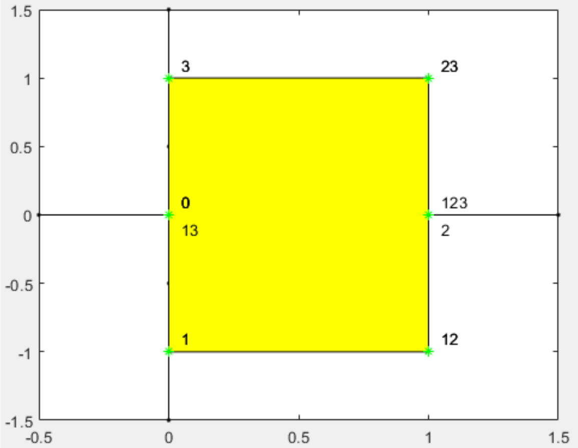

Рисунок 4 — Множество $\mathrm{conv}\{M_{\Delta}, \Omega_1\}$

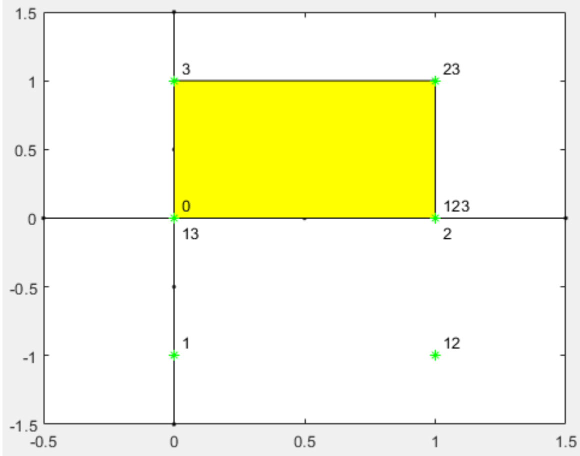

Рисунок 5 — Множество $\mathrm{conv}\{M_{\Delta}, \Omega^1\}$

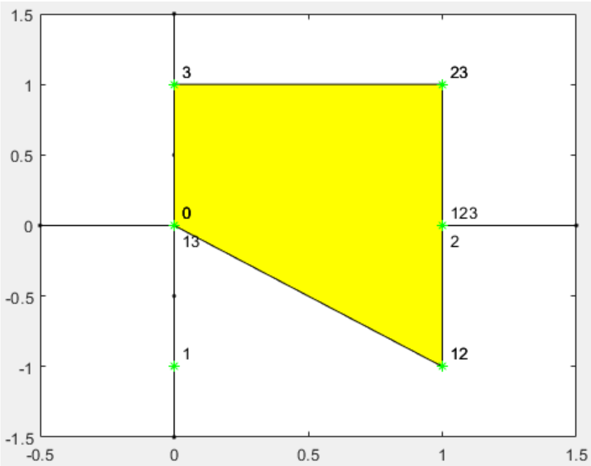

Рисунок 6 — Множество $\mathrm{conv}\{M_{\Delta}, \Omega_2\}$

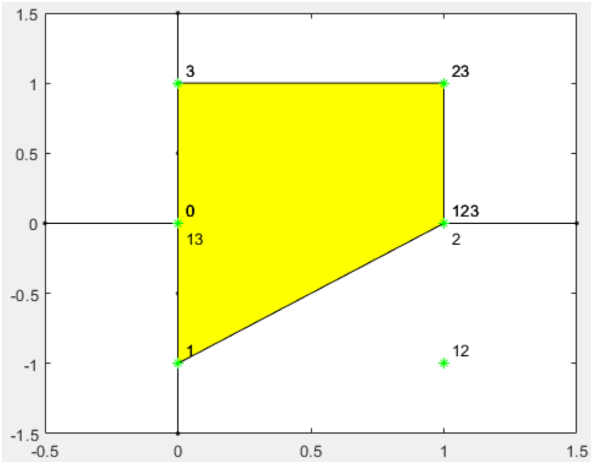

Рисунок 7 — Множество $\mathrm{conv}\{M_{\Delta}, \Omega^2\}$

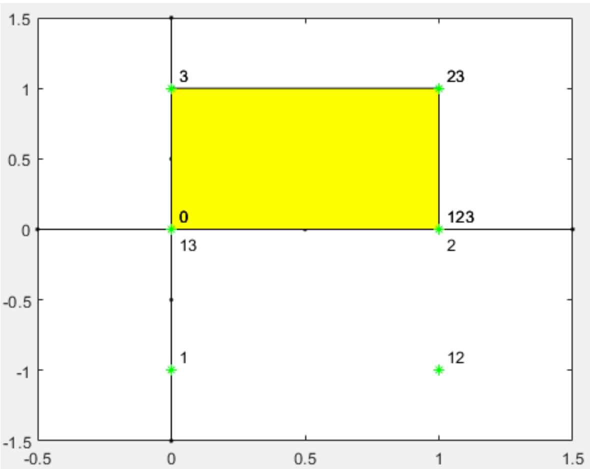

Рисунок 8 — Множество $\mathrm{conv}\{M_{\Delta}, \Omega_3\}$

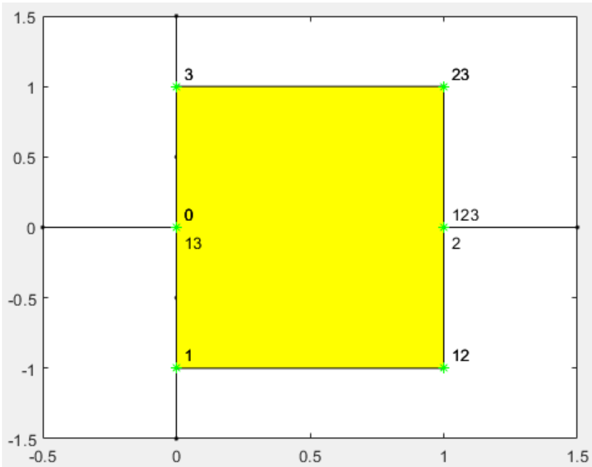

Рисунок 9 — Множество $\mathrm{conv}\{M_{\Delta}, \Omega^3\}$

В приложении приводится код программы, написанный в среде MATLAB, описание и применение которого осуществляется в третьем разделе работы.

Заключение. В магистерской работе рассмотрен вопрос нахождения условий на коэффициенты пучка $L_0(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота. В рамках практического задания в среде MatLab написана программа для получения характеристических многоугольников и их графического представления.