МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

О сходимости формального решения по методу Фурье волнового

наименование темы выпускной квалификационной работы

уравнения с суммируемым потенциалом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Чеканова Сергея Александровича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель зав.каф., д.ф.- м.н., профессор		А. П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., профессор		А. П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	дата, подпись	инициалы, фамилия

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

В магистерской работе «О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом» рассматриваются вопросы, связанные с решением волнового уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

при условиях

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{3}$$

и следующими требованиями на начальное положение $u(x,0) = \varphi(x)$:

1) $\varphi''(x) - q(x)\varphi(x) \in L_2[0,1]$,

2) $\varphi(x) \in L_2[0,1]$,

3) $L\varphi \in L_p[0,1]$,

4) $\varphi(x) \in L_p[0,1]$.

Считаем, что комплексная функция $q(x)$ принадлежит пространству $L[0,1]$.

Цель работы: исследовать вопросы сходимости формального решения, полученного методом Фурье при минимальных условиях на $\varphi(x)$, и установить связь сумм формального решения с решениями задачи (1)-(3), в том числе и обобщенными решениями.

Объект исследования: волновое уравнения вида (1) при условиях (2)-(3).

Основное содержание работы. Магистерская работа состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников.

Введение содержит следующие положения: актуальность темы исследования, цель работы, объект и предмет исследования, решаемые задачи.

"В первом разделе **«Вспомогательные утверждения»** приведены некоторые общеизвестные теоремы, необходимые для доказательства выдвинутых предположений, а именно: теорема Фубини, теорема о вычетах, неравенство Коши-Буняковского и неравенства Гёльдера.

Во втором разделе **«Классическое решение в случае квадратично-суммируемой $L\varphi$»** сделано предположение, что $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна вместе с первой производной,
$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $L\varphi = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) \in L_2[0,1]$.

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые, и для них верна асимптотика.

$$\lambda = \rho_n^2, \quad \rho_n = n\pi + o(1) \quad n = n_0, n_0 + 1, \ldots$$

Пусть$\tilde{\gamma_n} = \{\rho| \mid \rho - n\pi \mid = \delta$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geq n_0$ внутрь $\tilde{\gamma_n}$ попадает лишь по одному p_n. Пусть γ_n – образ $\tilde{\gamma_n}$ в λ – плоскости при отображении $\lambda = \rho^2, Re\rho \geq 0$. Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda \qquad (4)$$

где $r > 0$ фиксировано, на $\mid \lambda \mid = r$ нет собственных значений, все собственные значения $|\lambda_n| > r$ попадают лишь внутрь γ_n

Теорема 2. Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g)\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t d\lambda -$$

$$-\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0, который есть оператор L при $q(x) \equiv 0$ считаем, что вышеприведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0.

Займемся исследованием $u_0(x,t)$.

Лемма 1. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda^0 \varphi_1)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}(R_\lambda^0 \varphi_1)\cos\rho t d\lambda \qquad (5)$$

Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y''(x) - q(x)y(x) + \rho^2 y(x) = 0$$

с начальными данными

$$z_1(0,\rho) = 1, \quad z_1'(0,\rho) = 0, \quad z_2(0,\rho) = 0, \quad z_2'(0,\rho) = 1.$$

Тогда $z_j(x,\rho)$ являются целыми функциями по ρ и даже по λ, где $\lambda = \rho^2$

Теорема 3. Имеет место формула для резольвенты R_λ

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \qquad (6)$$

где

$$v(x,\rho)=\frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)},\quad (f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx,$$

$$(M_\rho f)(x)\int\limits_0^x M(x,\xi,\rho)f(\xi)d\xi,\quad M(x,\xi,\rho)=\begin{vmatrix} z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\\ z_1(\xi,\rho) & z_2(\xi,\rho)\end{vmatrix}$$

Лемма 2. Имеет место формула

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+t)+\Phi(x-t)], \tag{7}$$

где $\Phi(x),\Phi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\Phi''(x)\in L_2[-A,A]$ при любом $A>0,\Phi(x)=-\Phi(-x),\Phi(2+x)=\Phi(x),\Phi(x)=\varphi_1(x)$ при $x\in[0,1]$.

Лемма 3.Производные $\partial^2u_0(x,t)/\partial t^2$ и $\partial^2u_0(x,t)/\partial x^2$ существуют почти всюду в $Q_T=[0,1]\times[-T,T]=\{x,t|x\in[0,1],t\in[-T,T]\}$ и для таких x и t справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial x^2} \tag{8}$$

Теорема 4. Функция $u_0(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t при $x\in[0,1],t\in(-\infty,\infty)$; $u'_{0x}(x,t)(u'_{0t}(x,t))$ абсолютно непрерывна по x (по t); $\partial^2u_0(x,t)/\partial t^2$ и $\partial^2u_0(x,t)/\partial x^2$ конечны почти всюду по x и t и для них выполняется (8 и еще для всех $x\in[0,1]$, $t\in(-\infty,\infty)$ и (2), (3) (в (3) вместо $\varphi(x)$ надо брать $\varphi_1(x)$), т.е. $u_0(x,t)$ есть решение задачи (1)–(3) при $q(x)\equiv 0$ и $\varphi_1(x)$ вместо $\varphi(x)$, когда дифференциальное уравнение выполняется лишь почти всюду.

Теперь исследуем ряд $u_1(x,t)$. Имеем

$$u_1(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[v(x,\rho)(g,z_2)-v^0(x,\rho)(g,z_2^0)]\cos\rho t d\lambda-$$
$$-\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[v(x,\rho)(g,z_2)-v^0(x,\rho)(g,z_2^0)]\cos\rho t d\lambda.$$

Теорема 5. В полосе $|\,Im\rho\,|\leq h$ ($h>0$ и любое) имеют место асимптотические формулы

$$z_1(x,\rho)=\cos\rho x+O\left(\frac{1}{\rho}\right),\quad z_1'(x,\rho)=-\rho\sin\rho x+O(1),$$
$$z_2(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),\quad z_2'(x,\rho)=\cos\rho x+O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где оценки $O(...)$ равномерны по $x\in[0,1]$.

Лемма 4. Если $\mid Im\rho\mid\leq h$, то имеет место асимптотическая формула

$$\begin{gathered}z_2(x,\rho)=\frac{\sin\rho x}{\rho}-\frac{1}{2\rho^2}\int\limits_0^x q(\tau)d\tau\cos\rho x+\\+\frac{1}{4\rho^2}\int\limits_0^x\left[q\left(\frac{x-\tau}{2}\right)+q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\right]\cos\rho\tau d\tau+O\left(\frac{1}{\rho^3}\right).\end{gathered}\tag{9}$$

Оценка $O(...)$ равномерна по $x\in[0,1]$.

Лемма 5. Введем обозначения

$$\varphi_2(x)=\int\limits_x^1 g(\xi)q\left(\frac{\xi-x}{2}\right)d\xi,\quad \varphi_3(x)=\int\limits_x^1 g(\xi)q\left(\frac{\xi+x}{2}\right)d\xi.$$

Тогда

$$\|\varphi_j\|_2\leq 2\|g\|_2\|q\|_1,\quad j=2,3.\tag{10}$$

Здесь и в дальнейшем будем использовать обозначение $\|f\|_{L_p[0,1]}=\|f\|_p$.

Лемма 6. Обозначим через $\psi(x)$ одну из функций $\cos x$ или $\sin x$, через $\beta_n(\mu)$ – скалярные произведения вида $(m(x)\psi(\mu x),\psi(n\pi x))$, где $m(x)$ – одна из функций $g(x)$,
$g(x)\int\limits_0^x q(\tau)d\tau,\varphi_2(x),\varphi_3(x)$, и через $\tilde{\beta_n}(\mu)$ – некоторые суммы из $\beta_n(\mu)$, умноженные на постоянные числа из некоторого конечного набора таких чисел. Если $\rho=n\pi+\mu$, где $\mu\in\gamma_0$, то имеют место соотношения

$$(g,z_2)=\frac{1}{\rho}\tilde{\beta}_n(\mu)+\frac{1}{\rho^2}\tilde{\beta}_n(\mu)+O\left(\frac{\|g\|_2}{\rho^3}\right)\tag{11}$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{\rho^2}\tilde{\beta}_n(\mu) + O\left(\frac{\|g\|_2}{\rho^3}\right). \tag{12}$$

Лемма 7. Если $\rho \in \tilde{\gamma}_n$, то имеют место асимптотические формулы

$$v(x,\rho) - v^0(x,\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad v(x,\rho) = O(1),$$

$$v'(x,\rho) - v^{0'}(x,\rho) = O(1), \quad v'(x,\rho) = O(\rho),$$

$$v''(x,\rho) - q(x)v(x,\rho) - v^{0''}(x,\rho) = O(\rho),$$

где оценки $O(...)$ равномерны по $x \in [0,1]$

Теорема 6. Ряд $u_1(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и дважды по t сходятся абсолютно и равномерно в Q_T при любом $T > 0$.

Лемма 8. Функция $u'_{1x}(x,t)$ абсолютно непрерывна по x и почти всюду справедливо соотношение

$$u''_{1x^2}(x,t) = q(x)u(x,t) + d(x,t),$$

где

$$d(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{\lambda}{\lambda-\mu_0}[v(x,\rho)(g,z_2) + \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\frac{\lambda}{\lambda-\mu_0}[v(x,\rho)(g,z_2) -$$

$$-v^0(x,\rho)(g,z_2)]\cos\rho t d\lambda$$

и ряд для $d(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T.

Теорема 7. Если $q(x) \in L[0,1], \varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0,\ L\varphi \in L_2[0,1]$, то сумма $u(x,t)$ ряда формального решения обладает следующими свойствами: $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x и t; $u'_x(x,t)(u'_t(x,t))$ абсолютно непрерывна x (по t); удовлетворяет уравнению (1) почти всюду и условиям (2), (3), т.е. является решением задачи (1)–(3), когда уравнение (1) выполняется лишь почти всюду.

В третьем разделе **«Обобщенное решение в случае квадратично-сум-**

мируемой φ» рассматривается задача (1)–(3), когда $\varphi(x)$ лишь из $L_2[0,1]$. Формальное решение в этом случае представим в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda^0 \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} (R_\lambda^0 \varphi) \cos \rho t d\lambda,$$

а $u_1(x,t)$ получается из $u_0(x,t)$ заменой $R_\lambda^0\varphi$ на $R_\lambda\varphi - R_\lambda^0\varphi$.

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi - R_\lambda^0 \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} (R_\lambda\varphi - R_\lambda^0 \varphi) \cos \rho t d\lambda,$$

Лемма 9. Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в области Q_T при любом $T > 0$, причем

$$\max_{Q_T} |u_1(x,t)| \leq c_T \|\varphi\|_2,$$

где постоянная c_T зависит только от T.

Исследуем ряд $u_0(x,t)$. По теореме вычетов имеем

$$u_0(x,t) = 2 \sum (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\xi \cos n\pi t.$$

Отсюда следует, что

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\{\Phi(x,t) + \Phi(x-t)\}, \tag{13}$$

где $\Phi(x) = 2\sum(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\xi$. По теореме Карлесона ряд для $\Phi(x)$ сходится почти всюду на $(-\infty;\infty)$.

Теорема 8. Если $q(x) \in L[0,1],\ \varphi(x) \in L_2[0,1]$, то ряд формального решения по методу Фурье сходится почти всюду по x и t и для его суммы $u(x,t)$ верно $u(x,0) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$ почти всюду. Более того, если $\varphi_h(x)$ имеет тот же смысл, что и $\varphi(x)$ в разд.1 и $\|\varphi_h - \varphi\| \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ задачи (1)-(3) для такой $\varphi_h(x)$ сходится к $u(x,t)$ в $L_2[Q_T]$ при любом $T > 0$.

В четвертом разделе **«Классическое решение в случае p– той суммиру-**

емой $L\varphi$» рассматривается случай, когда $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0,\ L\varphi \in L_P[0,1]$, где $1 < p < 2$.

Лемма 10. Если

$$\varphi_2(x) = \int\limits_x^1 g(\xi) q\left(\frac{\xi - x}{2}\right) d\xi,\ \varphi_3(x) = \int\limits_x^1 g(\xi) q\left(\frac{\xi + x}{2}\right) d\xi,$$

$$g = (L - \mu_0 E)\varphi,$$

то имеют место оценки

$$\|\varphi_j\|_p \leq 2\|g\|_p \|q\|_1,\ j = 2, 3. \tag{14}$$

Лемма 11. Обозначим через $\psi(x)$ одну из функций $\cos x$ или $\sin x$, через $\beta_n(\mu)$ – скалярные произведения вида $(m(x)\psi(\mu x), \psi(n\pi x))$, где $m(x)$ – одна из функций $g(x), g(x)\int\limits_0^x q(\tau)d\tau, \varphi_2(x), \varphi_3(x)$, и через $\tilde{\beta}_n(\mu)$ – некоторые суммы из $\beta_n(\mu)$, умноженные на постоянные числа из некоторого конечного набора таких чисел. Если $\rho = n\pi + \mu$, где $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, то имеют место соотношения

$$(g, z_2) = \frac{1}{\rho}\tilde{\beta}_n(\mu) + \frac{1}{\rho^2}\tilde{\beta}_n(\mu) + O\left(\frac{\|g\|_p}{\rho^3}\right), \tag{15}$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{\rho^2}\tilde{\beta}_n(\mu) + O\left(\frac{\|g\|_p}{\rho^3}\right). \tag{16}$$

Лемма 12. Пусть $f(x,\mu) = f(x)\psi(\mu x)$, где $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \psi(n\pi x))$, $f(x) \in L_p[0,1]$, $1 < p < 2$. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leq \left(\sum_{n_1}^{n_2} \frac{1}{n^p}\right)^{1/p} \|f\|_p,$$

где $c > 0$ не зависит от $n_1, n_2, f(x)$ и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$.

Лемма 13. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x-t)], \tag{17}$$

где $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\Phi''(x) \in L_p[-A, A]$ при любом $A > 0$, $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(2 + x) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \varphi_1(x) = R^0_{\mu_0} g$ при $x \in [0, 1]$.

Теорема 9. Если $q(x) \in L[0, 1]$,$\varphi(x)$,$\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $L\varphi \in L_p[0, 1]$, то сумма $u(x, t)$ ряда формального решения задачи (1)–(3) обладает следующими свойствами: $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и t; $u'_x(x, t)(u'_t(x, t))$ абсолютно непрерывна по x (по t); удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) почти всюду и условиям (2), (3), т.е. является решением смешанной задачи (1)–(3), когда уравнение (1) удовлетворяется лишь почти всюду.

В пятом разделе **«Обобщенное решение в случае p– той суммируемой φ»** рассматривается обобщенное решение задачи при условии $\varphi(x) \in L_p[0, 1]$. Рассмотрим, наконец, задачу (1)–(3), когда $\varphi(x)$ – произвольная функция из $L_p[0, 1], 1 < p < 2$. Формальное решение в этом случае представим в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t),$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R^0_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} (R^0_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda,$$

а $u_1(x, t)$ получается из $u_0(x, t)$ заменой $R^0_\lambda \varphi$ на $R_\lambda \varphi - R^0_\lambda \varphi$ и имеет вид:

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi - R^0_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi - R^0_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda.$$

С применением неравенства Хаусдорфа–Юнга получаем, что справедлива

Лемма 14. Ряд $u_1(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T, причем

$$\max_{Q_T} |u_1(x, t)| \leq c_T \|\varphi\|_p.$$

Далее, вычисляя $u_0(x, t)$ по теореме вычетов, получаем

$$u_0(x, t) = 2 \sum (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t.$$

Отсюда следует
$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\{\Phi(x+t) + \Phi(x-t)\},$$
где $\Phi(x) = 2\sum(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x$. По теореме Карлесона–Ханта ряд для $\Phi(x)$ сходится почти всюду на $(-\infty, \infty)$. Отсюда, как и в случае леммы 14, получаем, что имеет место

Лемма 15. Ряд $u(x,0)$ сходится на $[0,1]$ к $\varphi(x)$ почти всюду. Пусть теперь $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 9 и $u_h(x,t)$ – соответствующее решение по теореме 9. Тогда также, как в разд. 2, получаем, что справедлива

Лемма 16. Имеет место оценка
$$\|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{L_p[Q_T]} \leq c_T\|\varphi_h - \varphi\|_p.$$
В итоге приходим к следующему важному результату.

Теорема 10. Если $q(x) \in L[0,1], \varphi(x) \in L_p[0,1], 1 < p < 2$, то ряд формального решения по методу Фурье задачи (1)-(3) сходится почти всюду и для его суммы $u(x,t)$ верно соотношение $u(x,0) = \varphi(x)$ почти всюду при $x \in [0,1]$. Более того, если $\varphi_h(x)$ такова, что $\varphi_h(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi_h(0) = \varphi_h(1) = 0, L\varphi_h \in L_p[0,1]$ и $\|\varphi_h(x) - \varphi(x)\| \to 0$ при $h \to 0$, то решение $u_h(x,t)$ смешанной задачи (1)-(3) для такой $\varphi_h(x)$, даваемое теоремой 9, сходится к $u(x,t)$ в $L_p[Q_T]$ при любом $T > 0$.

Таким образом, $u(x,t)$ есть в этом смысле обобщенное решение задачи (1)-(3) при любой $\varphi(x) \in L_p[0,1]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы проведены исследование сходимости формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с суммируемым потенциалом при меньших требованиях на начальное положение $u(x,0) = \varphi(x)$, чем это требуется для классического решения вплоть до случая $\varphi(x) \in L_p[0,1]$ при $p > 1$. Было показано, что ряд формального решения всегда сходится и представляет собой обобщенное решение смешанной задачи.