МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Оценка четвёртого коэффициента на классе ограниченных однолистных функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Кожарской Надежды Олеговны

Научный руководитель
доцент, к.ф.м.н. ____________________ В. Г. Гордиенко
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.м.н., профессор ____________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Гипотеза Бибербаха о справедливости неравенства $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, для $f \in S$ со знаком равенства только для вращений функции Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \tag{1}$$

доказана Де Бранжем [1,2]. Функция Кебе (1) отображает единичный круг на комплексную плоскость с разрезом по лучу на отрицательном направлении вещественной оси с вершиной в точке $w = -\frac{1}{4}$.

Еще до доказательства де Бранжа предпринимались удачные попытки оценки начальных коэффициентов в классе S. Что касается оценок в классах $S(M)$, то они были менее успешными. Так, Пик[3] доказал, что

$$\max_{f \in S(M)} |a_2| = 2 - \frac{2}{M}, \quad M > 1. \tag{2}$$

Максимум в (2) достигается только для функций Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\Big(\frac{K(z)}{M}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M) z^n. \tag{3}$$

Функция Пика (3) отображает единичный круг на круг радиуса M с центром в начале координат, с разрезом вдоль отрезка на отрицательном направлении вещественной оси.

Коэффициент a_3 в классе $S(M)$ оценивали независимо друг от друга А.С.Шиффер, Д.С.Спенсер [4] в 1945 году и О.Тамми[5] в 1953. Функция Пика не дает максимум модуля коэффициента $|a_3|$ и эта оценка является более сложной. Известно, что в случае с действительными коэффициентами, функция Пика дает максимум $|a_4|$ для $M \geq 11$[6].

[1]Branges, L. A proof of the Bieberbach conjecture // LOMI Preprints E-5-84., 1984.- P.1-21.

[2]Branges, L. A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math., 1985. - P.137-152.

[3]Pick, G. Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichetes und zugleich beschränktes Gebiet // S.-B.Kaiserl.Akad.Wiss.Wien.Math.-Naturwiss.Kl.Abt.II a., 1917.- H.247-263.

[4]Schaeffer, A.C., Spencer D.C. On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Trans.Amer.Math.Soc., 1965., №12-P.67-78.

[5]Tammi, O. On the maximalization of the coefficient a_3 of bounded schlicht functions // Ann.Acad.Sci.Fennicae.Ser.A.I.Math.-Phys., 1953., №149-P.1-14.

[6]Tammi, O. On optimizing parameteres of the power inequality for a_4 in the class of bounded univalent functions // Ann.Acad.Sci.Fennicae.Ser.A.I.Math.-Phys., 1973., №560 - P.1-24.

В данной бакалаврской работе изучается вопрос об оценке модуля четвертого коэффициента на классе S(M) ограниченных однолистных функций. Этот вопрос является одним из актуальных в геометрической теории функции комплексного переменного. К настоящему времени точные оценки четвертого коэффициента в классе $S(M)$ найдены не для всех $M > 1$, однако известно, что для достаточно больших M, функция Пика является экстремальной в этой задаче.

Целью работы является изучение различных методов нахождения константы M_0, такой что для всех $M \geq M_0$, функция Пика дает локальный максимум для $|a_4|$.

Основное содержание работы. В первой части приведем ряд вводных сведений из теории Лёвнера, которые необходимы для дальнейшего изложения. Пусть γ-кусочно-аналитический разрез,который задается уравнением $w = \alpha(t)$, и параметр t меняется на отрезке $[0, t_0]$, где $|\alpha(t)| < 1$, когда $0 \leq t < t_0$ и $|\alpha(t_0)| = 1$. Обозначим через $G(t)$-область, полученную из круга $|w| < 1$ проведением разреза γ_t. При изменении параметра t от 0 до t_0 область G(t) расширяется от G(0)- круга с полным разрезом до круга $|w| < 1$, а при $t^{'} < t^{''}$ область $G(t^{'})$ содержится в $G(t^{''})$, при этом не совпадая с $G(t^{''})$. Будем обозначать через $\gamma_{t^{'}t^{''}}$ дугу на γ, соответствующую отрезку $t^{'} \leq t \leq t^{''}$.

Обозначим функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на $G(t)$,через

$$w = g_t(z) = \beta(t)(z + a_2(t)z^2 + ...), \qquad (\beta(t) > 0), \tag{1.1}$$

где $\beta(t)$ будет положительной , непрерывной и строго возрастающей функцией от t в $0 \leq t < t_0$. Введем еще функцию

$$f_t(z) = g_t^{-1}(g_0(z)) = e^{-t}(z + ...).$$

Так же как и $g_t(z)$, функция $f_t(z)$ будет непрерывной по t в $0 \leq t < t_0$. При каждом t функция $f_t(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на круг $|\xi| < 1$ с разрезом по некоторой дуге Жордана. При каждом z из круга $|z| < 1$ функция $f_t(z)$ в промежутке $0 \leq t < t_0$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению, известному под названием уравнение Лёвнера:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1+kf}{1-kf}, \tag{1.3}$$

где $k = k(t)$- непрерывная комплексная функция от t и $|k(t)| = 1$.

Во второй части изучим методы получения оценки $|a_4| \leq p_4(M)\ \forall f \in S(M)$, описанные Шиффером и Тамми в 1965 году[7] с помощью неравенства Грунского-Нехари.

Здесь рассматривается оценка модуля четвертого коэффициента в классе $S(b_1)$.

Пусть $S(b_1)$ класс однолистных ограниченных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < 1$, с разложение в ряд

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^\nu, \qquad 0 < b_1 \leq 1. \tag{2.1}$$

Этот класс часто изучается в нормированной эквивалентной форме

$$F(z) = b^{-1}f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu, \qquad 0 < b_1 \leq 1, \tag{2.2}$$

$$|F(z)| \leq b_1^{-1}, \qquad a_\nu = \frac{b_\nu}{b_1}.$$

Полагая $1/b_1 = M$, получим, что $F(z) \in S(M)$, $M > 1$.

Поставим задачу, найти оценку модуля четвертого коэффициента a_4, в зависимости от b_1. Для этой цели воспользуемся неравенствами Грунского-Нехари[8,9]. Такие неравенства впервые были применены В. Сингхом при решении аналогичной задачи в классе $S_R(b_1)$ ограниченных однолистных функций с действительными коэффициентами. Этот метод дает точную оценку для $|a_4|$ в интервале значений b_1 вблизи нуля и единицы.

В этом классе справедливы следующие теоремы:

---

[7] Schaeffer, A.C.,Tammi, O. On the fourth coefficient of bounded univalent functions // Trans.Amer.Math.Soc., 1965., №119 - P.67-78.

[8] Grunsky, H. Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen // Math.Z.45, 1939. - P.29-61.,

[9] Nehari, Z. Some inequalities in the theory of functions // Trans.Amer.Math.Soc.75, 1953. - P.256-286.

Теорема 3. *В классе $S(b_1)$ ограниченных однолистных функций модуль четвертого коэффициента удовлетворяет неравенству*

$$|a_4| \leq 4 - 20b_1 + 30b_1^2 - 14b_1^3, \tag{2.46}$$

по крайне мере в интервале

$$0 \leq b_1 \leq \frac{1}{700}. \tag{2.47}$$

Равенство в (2.46) возможно только для случая функции Пика.

Здесь использовалась достаточно грубая оценка для получения результата изложенного в Теореме 3. Попытаемся теперь расширить диапазон значений коэффициента b_1 в зависимости от x. И справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *При надлежащем выборе положительного параметра α, мы получаем следующую оценку для a_4 в зависимости x:*

$$a_4 - (4 - 20b_1 + 30b_1^2 - 14b_1^3) \leq \frac{1}{3}x\, M(x), \tag{2.60}$$

где

$$M(x) = 3(1-b_1)(11b_1 - 1) - \frac{3}{2}(3 + 2b_1)x + \frac{7}{4}x^2 + \tag{2.61}$$
$$+ \frac{3}{2}(4-x)\left[\sqrt{\frac{4}{3} + \left(\frac{5}{2} - 4b_1 - \frac{5}{4}x\right)^2} - \left(\frac{5}{2} - 4b_1 - \frac{5}{4}x\right)\right].$$

С помощью этого неравенства мы можем расширить интервал значений b_1, для которого оценка (2.60) допустима. Действительно, это неравенство зависит, исключительно, от знака $M(x)$ в интервале $0 < x \leq 2(1 - b_1)$.

С помощью программы Wolfram Mathematica 10.0, было найдено, что $M(x)$ принимает отрицательные значения по меньшей мере для $b_1 < \dfrac{3}{100}$.

Рассмотрим теперь задачу об оценке $|a_4|$ для значений b_1 близких к 1.

И здесь доказывается, что

$$a_4 \leq \frac{2}{3}(1 - b_1^3) \qquad \text{для} \quad 1 \geq b_1 \geq \frac{19}{34}. \tag{2.70}$$

Возникает последний вопрос: с помощью какой функции можно достичь знака равенства в (2.70)?
И оказалось, что равенство в (2.70) возможно только для функций из класса $S(b_1)$ с $a_2 = a_3 = 0$. Экстремальная функция имеет вещественные коэффициенты и отображает круг E на единичный круг с разрезами вдоль отрезков на мнимой оси.

В третьей части, основываясь на статье Прохорова Д.В и Васильева А.Ю. [10], будет рассмотрен алгоритм вычисления константы M_0 методами теория оптимального управления.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}, \quad w\Big|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t < \infty,$$

где $u = u(t)$– кусочно непрерывная управляющая функция. Интегралы уравнения Левнера представляют плотный подкласс функций класса S. При переходе к классу $S(M)$ произведем в этом уравнении замену переменной $t \to 1 - e^{-t}$ и перепишем его в виде

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-w}{(1-t)}\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}, \quad w\Big|_{t=0} = z, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.1}$$

Плотный подкласс функций $f \in S(M)$ представляется через интегралы

$$w = w(z,t) = (1-t)(z + a_2(t)z^2 + ...), \quad f(z) = Mw\left(z, 1 - \frac{1}{M}\right), \tag{3.2}$$

уравнения (3.1).

Управление $u \equiv \pi$ порождает функцию Кебе $K(z)$ в классе S или функцию Пика $P_M(z)$ в классе $S(M)$ по формуле (3.2). Рассмотрим множество начальных коэффициентов

$$V_4(M) = \left\{a_2, a_3, Re\, a_4 : \ f \in S(M)\right\}, \quad 1 < M \leq \infty,$$

[10] Prokhorov, D. and Vasil'ev, A. Exact Bombieri numbers and fourth coefficient for bounded univalent functions // Inventiones Mathematicae, 1991. - P.1-18.

функций $f \in S(M)$. Граничные точки множества $V_4(M)$ доставляются функциями из плотного подкласса класса $S(M)$, имеющих представление (3.2). При этом соответствие между граничными точками и функциями взаимно-однозначно. Известно, что функция Пика $P_M(z)$ доставляет угловую граничную точку этого множества, через которую проходит семейство опорных гиперплоскостей.

Обозначим $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t),\ \ k = 2, 3, 4$. Подставляя (3.2) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в уравнении Левнера, получим фазовую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = -2\cos u, \qquad x_1(0) = 0,\\
&\dot{x}_2(t) = 2\sin u, \qquad x_2(0) = 0,\\
&\dot{x}_3(t) = -4(x_1\cos u + x_2\sin u) + 2(t-1)\cos 2u, \quad x_3(0) = 0,\\
&\dot{x}_4(t) = 4(x_1\sin u - x_2\cos u) - 2(t-1)\sin 2u, \quad x_4(0) = 0,\\
&\dot{x}_5(t) = -2((2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos u + 2(x_4 + x_1x_2)\sin u)+\\
&\ + 6(t-1)(x_1\cos 2u + x_2\sin 2u) - 2(t-1)^2\cos 3u, \quad x_5(0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Экстремальная задача

$$Re\, a_4 \to loc \max$$

в классе $S(M)$ для достаточно больших M, где в качестве экстремальной функции выступает функция Пика $P_M(z)$, формализуется теперь как

$$x_5\left(1 - \frac{1}{M}\right) \to loc \max \tag{3.4}$$

для решений $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_5(t)$ системы (3.3) с управляющей функцией $u \equiv \pi$. Следуя принципам оптимизационного формализма, для проверки необходимого условия экстремума, введем функцию Гамильтона

$$
\begin{aligned}
&H(t,x,\Psi,u) = -2\cos u\Psi_1 + 2\sin u\Psi_2 \\
&-(4(x_1\cos u + x_2\sin u) - 2(t-1)\cos 2u)\Psi_3 + \\
&+(4(x_1\sin u - x_2\cos u) - 2(t-1)\sin 2u)\Psi_4 - \\
&-(2((2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos u + 2(x_4 + x_1x_2)\sin u) - \\
&-6(t-1)(x_1\cos 2u + x_2\sin 2u) + 2(t-1)^2\cos 3u)\Psi_5,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$, удовлетворяет (3.3) и $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5)^T$, $\Psi_5 = 1$ удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Psi}_1 = 4\cos u\Psi_3 - 4\sin u\Psi_4 + (4x_1\cos u + 4x_2\sin u - 6(t-1)\cos 2u)\Psi_5, \\
&\dot{\Psi}_2 = 4\sin u\Psi_3 + 4\cos u\Psi_4 - (4x_2\cos u - 4x_1\sin u + 6(t-1)\sin 2u)\Psi_5, \\
&\dot{\Psi}_3 = 4\cos u\Psi_5, \\
&\dot{\Psi}_4 = 4\sin u\Psi_5, \\
&\dot{\Psi}_5 = 0,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

и условиям трансверсальности

$$
\Psi_j\left(1 - \frac{1}{M}\right) = 0, \quad j = 1, ...4. \tag{3.7}
$$

Оптимальная управляющая функция $u^0(t)$, соответствующая экстремальной функции $f^*(z) \in S(M)$, в точках непрерывности удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [11]

$$
\max_u H(t, x^*, \Psi^*, u) = H(t, x^*, \Psi^*, u^0), \qquad 0 \le t \le 1 - \frac{1}{M}, \tag{3.8}
$$

[11] Понтрягин, Л.С., Болтянский, В.Г., Гамкрелидзе, Р.В., Мищенко, Е.Ф. Математическая теория оптимального управления. — Москва: Наука,1969. - 308 с.

где $(x^*, \Psi^*) = (x^*(t), \Psi^*(t))$ является решением систем (3.3) и (3.6) с $u = u^0(t)$ в их правых частях. Следовательно, u^0 является корнем уравнения

$$H_u(t, x^*(t), \Psi^*(t), u^0(t)) = 0. \tag{3.9}$$

Используя условия трансверсальности, найдем вектор начальных данных сопряженной гамильтоновой системы. На конце отрезка при $t = 1 - \dfrac{1}{M}$ получаем

$$\Psi_3(0) = 4\left(1 - \frac{1}{M}\right), \qquad \Psi_1(0) = 9 - \frac{24}{M} - \frac{15}{M^2}.$$

Очевидно, что $\Psi_4 = \Psi_2 = 0$, так как равенство $u = u^0$ приводит к условиям $\sin u = 0,\ x_2(t) = 0$.

Для решения экстремальной задачи (3.4) нам следует подвергнуть сравнению все функции из окрестности точки граничной поверхности $\partial V_4(M)$ доставляемой функцией Пика $P_M(z)$. Все такие функции представимы по (3.2) интегралами (3.1) дифференциального уравнения Левнера с непрерывным управлением u, удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина. Поскольку граничная поверхность $\partial V_4(M)$ параметризуется вектором начальных данных сопряженной гамильтоновой системы[12], будем варьировать начальные данные вектора Ψ^0 отвечающие функции Пика. Легко убедиться, что изменение первой и третьей координат вектора $\Psi^0(0)$ не вызывают изменение фазового вектора $x^0(t)$. Следовательно, для изучения строения поверхности $\partial V_4(M)$ в окрестности точки $x^0(1 - 1/M) \in \partial V_4(M)$, достаточно рассмотреть только те вариации вектора $\Psi^0(0)$, у которых $\Psi_2(0) = \Psi_4(0) = 0$. Положим

$$\Psi_2(0) = p, \quad \Psi_4(0) = q, \tag{3.11}$$

где $(p, q) \in R^2$.

[12] Прохоров, Д.В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Матем.сб., 1990.-Т.181.,№12. - С.1659-1677.

Таким образом, вариация вектора начальных данных $\Psi(0)$ в экстремальной задаче (3.3)-(3.8),имеет вид

$$(\Psi_2(0), \Psi_4(0)) = (p, q).$$

Следовательно, задача нахождения точной границы в задаче (3.4) сводится к следующему. Пусть

$$F^M : (p, q) \to x_5 \left(1 - \frac{1}{M}\right) \tag{3.13}$$

является функцией, которая начальным данным (p, q) в экстремальной задаче (3.3)-(3.8) сопоставляет значение $x_5\Big(1 - 1/M\Big)$. Требуется найти значение M_0 такое, что для всех $M > M_0$ функция $F^M(p, q)$ достигает локального максимума в точке (0,0).

Убедимся вначале, что для функции F выполняется необходимое условие экстремума в точке $(p, q) = (0, 0)$, т.е. выполняются равенства $F^M_p(0, 0) = F^M_q(0, 0) = 0$.

Дифференцирование последнего уравнения системы (3.3) по переменной p в точке $(p, q) = (0, 0)$, приводит к $F^M_p(0, 0) = (x_5)_p(1 - \frac{1}{M})|_{(0,0)} = 0$. Аналогично проверяется равенство $F^M_q(0, 0) = (x_5)_q(1 - \frac{1}{M})|_{(0,0)} = 0$. Следовательно, выполняются необходимые условия локального экстремума функции $F^M(p, q)$ в точке $(0, 0)$.
Далее для проверки достаточного условия локального экстремума необходимо вычислить частные производные первого и второго порядка для $(x_5)_{jl}, (x_k)_{jl}, (x_s)_j,\ j, l = p, q;\ k = 1, 3;\ s = 2, 4;$

Для вычисления частных производных управления u, продифференцируем тождество (3.9) по p, что приведет нас к следующему уравнению:

$$H_{ux}x_p + H_{u\Psi}\Psi_p + H_{uu}u_p = 0, \tag{3.19}$$

откуда находим выражение для частной производной

$$u_p = -\frac{H_{ux}x_p + H_{u\Psi}\Psi_p}{H_{uu}}. \tag{3.20}$$

Аналогично найдем

$$u_q = -\frac{H_{ux}x_q + H_{u\Psi}\Psi_q}{H_{uu}}. \tag{3.21}$$

Из (3.5) при $(p,q)=(0,0)$ можно найти

$$H_{uu}(t,x^0,\Psi^0,\pi) = -2\left(16t^2 - \left(8+\frac{16}{M}\right)t + 2 - \frac{8}{M} + \frac{15}{M^2}\right), \tag{3.22}$$

$$H_{ux_2}(t,x^0,\Psi^0,\pi) = 4\left(t+1-\frac{4}{M}\right), \qquad H_{ux_4}(t,x^0,\Psi,\pi) = 4, \tag{3.23}$$

$$H_{u\Psi_2}(t,x^0,\Psi^0,\pi) = -2, \qquad H_{u\Psi_4}(t,x^0,\Psi^0,\pi) = 4\Big(1-3t\Big). \tag{3.24}$$

$(\Psi_l)_p, (\Psi_l)_q$, $l = 1,...,4$.

Подставляя(3.22)-(3.24) в (3.20) и (3.21), вычисляем необходимые частные производные.

Функция $F^M(p,q)$, соответствующая локальной экстремальной задаче (3.4), достигает локального максимума в точке $(p,q)=(0,0)$. Остается проверить достаточное условие экстремума функции F^M, зависящей от вектора (p,q), которое заключается в том, что при $(p,q) = (0,0)$ квадратичная форма, порожденная квадратной матрицей $\Delta = \Delta(M)$ с элементами $(x_5)_{pp}, (x_5)_{pq}, (x_5)_{qp}, (x_5)_{qq}$, отрицательно определена.

Согласно критерию Сильвестра, матрица $\Delta(M)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$F^M_{pp}(0,0) < 0, \qquad F^M_{pp}(0,0)F^M_{qq}(0,0) - (F^M_{pq}(0,0))^2 > 0. \tag{3.32}$$

Суммируя выше сказанное, мы можем прийти к заключению, что проблема поиска M для которого функция Пика локально максимизирует Rea_4 в $S(M)$ сводится к решению уравнений

$$(x_5)_{pp}\Big(1-\frac{1}{M}\Big) = 0 \tag{3.33}$$

или

$$(x_5)_{pp}\Big(1-\frac{1}{M}\Big)(x_5)_{qq}\Big(1-\frac{1}{M}\Big)-\Big((x_5)_{pq}\Big(1-\frac{1}{M}\Big)\Big)^2=0, \tag{3.34}$$

где $(x_5)_{jl}, (x_k)_{jl}, (x_s)_j,\ j,l = p,q;\ \ k = 1,3;\ s = 2,4;$ являются решениями задачи Коши с u_p и u_q.

Численное интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений с использованием пакета Wolfram Mathematica 10.0 и проверкой критерия Сильвестра приводят к приближенному значению $M_0 = 11.384247\ldots$. Таким образом мы приходим к следующему заключению:
функция Пика доставляет локальный максимум Rea_4 в классе $S(M)$, если $M > M_0$, и локально не максимизирует Rea_4, если $M < M_0$, где $M_0 = 11.384247\ldots$ корень уравнения (3.34). Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Число $M_0 = 11.384247\ldots$ определяется условием, что для всех $M > M_0$, матрицы $\Delta(M)$ удовлетворяет условию (3.34), где элементы этой матрицы являются значением в точке $t = 1 - 1/M$ решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений (3.30) с u_p и u_q из (3.31).*

Заключение. В данной работе изучен вопрос об оценке модуля четвертого коэффициента на классе ограниченных однолистных функций, а именно, подробно рассмотрены два метода: принцип площадей и теория оптимального управления, описанные во второй и третьей частях работы.

В приложениях А и Б приведены программы, описывающие численное получение констант M_0 и b_1. Также приложения проиллюстрированы графиками, с целью упрощения анализа поведения функций вблизи значений b_1. Все вычисления были получены с использованием пакета Wolfram Mathematica 10.0.